Über die Größe der Einzugsbereiche des Newtonverfahrens transzendenter ganzer Funktionen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

vorgelegt von

Julka Deimling

Kiel
Juli 2011

Referent/in:	Prof. Dr. W. Bergweiler
Korreferent/in:	Prof. Dr. H. König
Tag der mündlichen Prüfung:	26.10.2011
Zum Druck genehmigt:	Kiel, 26.10.2011

Prof. Dr. Lutz Kipp, Dekan

Zusammenfassung

Eines der bekanntesten numerischen Verfahren zur Approximation von Nullstellen differenzierbarer Funktionen ist das Newtonverfahren. In dieser Arbeit schätzen wir die Größe der Einzugsbereiche der Nullstellen gewisser Funktionen unter dem Newtonverfahren ab. Dabei bezeichnen wir die Menge aller Punkte, die unter Iteration des Newtonverfahrens gegen eine Nullstelle der betrachteten Funktion konvergieren, als Einzugsbereich. Für geeignet normierte Polynome gab Kriete eine Abschätzung der Größe der Einzugsbereiche. Er bewies insbesondere, dass für solche Polynome der Flächeninhalt der Einzugsbereiche unendlich ist.

In dieser Arbeit zeigen wir ähnliche Ergebnisse für reelle transzendente ganze Funktionen, deren Ordnung durch zwei beschränkt ist. Dass man für Funktionen höherer Ordnung derartige Ergebnisse nicht erwarten kann, erhält man aufgrund eines Ergebnisses von Haruta. Sie bewies, dass schon für Funktionen, die die Gestalt $f(z) = P(z) \cdot \exp(Q(z))$ haben, wobei P ein Polynom vom Grad größer als zwei und Q ein beliebiges Polynom ist, die Größe der Einzugsbereiche endlich sind.

Wir werden beweisen, dass für Funktionen aus der Laguerre-Pólya-Klasse ($\mathcal{LP}$) die Einzugsbereiche der Fixpunkte des Newtonverfahrens unendlichen Flächeninhalt besitzen. Dabei besteht die Laguerre-Pólya-Klasse aus den Funktionen, die sich lokal gleichmäßig durch reelle Polynome mit ausschließlich reellen Nullstellen approximieren lassen. Es gilt der folgende Satz.

Satz 1 *Es sei $f \in \mathcal{LP}$ oder allgemeiner f von der Gestalt $f = g \cdot P$, wobei $g \in \mathcal{LP}$ und P ein reelles Polynom ist. Ferner sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f und U der unmittelbare Einzugsbereich von z_0 bezüglich des Newtonverfahrens. Dann gilt*

$$\mathit{area}\,(U) \;=\; \infty.$$

Mit Hilfe des Ergebnisses über $\mathcal{LP}$-Funktionen beweisen wir, dass für Flächeninhalte reeller transzendenter ganzer Funktionen der Ordnung kleiner als zwei eine quantitative Abschätzung nach unten möglich ist. Es gilt folgender Satz.

Satz 2 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine transzendente ganze Funktion endlicher Ordnung $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, welche nur endlich viele nicht reelle Nullstellen habe. Weiter sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f und U der unmittelbare Einzugsbereich von z_0 bezüglich des Newtonverfahrens. Ferner sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann existiert eine Konstante $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass*

$$\mathit{area}\,(U \cap A(0, R_0, R)) \geq R^{2-\rho-\varepsilon}$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{>2R_0}$ gilt. Insbesondere gilt

$$\mathit{area}\,(U) \;=\; \infty,$$

falls $\rho < 2$ ist.

Abstract

Newton's method is one of the best known numerical methods to approximate zeros of differentiable functions. In this thesis we estimate the area of basins of attraction of zeros of certain functions with respect to Newton's method. A basin of attraction is the set of all those points that converge to a zero of the considered function under iteration of Newton's method. For suitably normalized polynomials Kriete estimated the size of these basins. In particular he proved that each immediate basin of attraction has infinite area.

In this thesis we prove a similar result for real transcendental entire mappings with order at most two. A result of Haruta implies that such results for functions of higher order are impossible. She proved that already for functions of type $f(z) = P(z) \cdot \exp(Q(z))$ with polynomials P and Q, $\deg(Q) > 2$, each basin of attraction has finite area.

We will prove that for functions of the Laguerre-Pólya-class ($\mathcal{LP}$), i. e. the class of all functions which are a locally uniform limit of real polynomials with only real zeros, each immediate basin of attraction has infinite area. We give a proof the following theorem.

Theorem 1 *Let $f \in \mathcal{LP}$ or, more generally, of the form $f = P \cdot g$ with $g \in \mathcal{LP}$ and P be a real polynomial. Let $z_0 \in \mathbb{C}$ a zero of f and U be the immediate basin of attraction of z_0 with respect Newton's method. Then*

$$\mathit{area}\,(U) \;=\; \infty.$$

By means of this result about $\mathcal{LP}$-functions we will prove that for real transcendental entire functions of order less than two there exists a quantitative lower bound for the area of each immediate basin of attraction.

Theorem 2 *Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be a real transcendental entire function of finite order $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Assume that f has at most a finite number of non-real zeros. Let N_f be the corresponding Newton function. Let $z_0 \in \mathbb{C}$ be a zero of f and U be the immediate basin of attraction of z_0 with respect to N_f and let $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Then there exists a constant $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ such that*

$$\mathit{area}\,(U \cap A(0, R_0, R)) \geq R^{2-\rho-\varepsilon}$$

holds for all $R \in \mathbb{R}_{>2R_0}$. In particular,

$$\mathit{area}\,(U) \;=\; \infty,$$

if $\rho < 2$.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Walter Bergweiler für die Wahl des interessanten Themas und vor allem für seine hervorragende Betreuung dieser Arbeit bedanken. Für die viele Zeit, die er sich für meine Fragen und Anliegen genommen hat, und für seine hilfreichen Ratschläge und Hinweise gilt ihm mein besonderer Dank.

Mein Dank gilt auch der Arbeitsgruppe Komplexe Dynamik, insbesondere Dr. Helena Mihaljević-Brandt und Dr. Jörn Peter. Sie haben durch zahlreiche Diskussionen mathematischer und nichtmathematischer Natur meine Doktorandenzeit bereichert und mich bei der Revision dieser Arbeit unterstützt.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie und bei meinem Freund für die moralische Unterstützung und die Geduld, die sie in den letzten Jahren für mich aufgebracht haben, bedanken.

IV

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eines der bekanntesten numerischen Verfahren zur Approximation von Nullstellen einer Funktion ist das nach Sir Isaac Newton (1642 - 1726) benannte *Newtonverfahren.* Newton verwendete es, um die Nullstellen einer stetig differenzierbaren und reellwertigen Funktion zu approximieren. Mit der Entwicklung leistungsfähiger Computer in den 80er Jahren des 20. Jahrhunderts wuchs das Interesse an dem Newtonverfahren, da man seitdem in der Lage ist, die für dieses Verfahren notwendigen Rechnungen innerhalb kurzer Zeit durchzuführen.

Die Idee des reellen Newtonverfahrens ist folgende. Wählt man für eine Funktion f mit einer Nullstelle z_0 einen geeigneten Startwert x_0, so ist die Nullstelle der Tangente an f in x_0 eine erste Annäherung an z_0. Mit dieser Nullstelle wiederum kann man iterativ fortfahren. Eine natürliche Fragestellung, die sich für dieses Verfahren ergibt, ist die nach der Größe der Menge der Startwerte, für die das Verfahren gegen eine Nullstelle von f konvergiert. Aus numerischer Sicht ist dies aus folgendem Grund relevant. Je größer die Menge geeigneter Startwerte ist, desto effizienter arbeiten die Algorithmen, mit denen die Nullstellen approximiert werden.

Das reelle Newtonverfahren lässt sich auch auf *ganze* Funktionen, das heißt holomorphe und auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktionen, übertragen. Für eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ iteriert man also die Funktion

$$N_f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad N_f(z) := z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Offensichtlich sind die Nullstellen der Funktion f genau die Fixpunkte der Funktion N_f. Möchte man Nullstellen von f ermitteln, ist es daher wichtig zu wissen, für welche Startwerte die *Iterierten* der Funktion N_f gegen einen Fixpunkt konvergieren. Dabei ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die n-te *Iterierte von* N_f durch die Vorschrift

$$(N_f)^0 \ := \ \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \quad \text{und} \quad (N_f)^n \ = \ N_f \circ (N_f)^{n-1}$$

definiert.

Für einen Fixpunkt z_0 von N_f nennt man $\{z \in \mathbb{C} : (N_f)^n (z) \to z_0 \text{ für } n \to \infty\}$ den *Einzugsbereich* von z_0. Wir nennen die Zusammenhangskomponente des Einzugsbereichs, die z_0 enthält, den *unmittelbaren Einzugsbereich* von z_0. Untersucht man die oben beschriebene Fragestellung für das komplexe Newtonverfahren, ist also von Interesse, für welche Startwerte die Folge der Iterierten der Funktion N_f konvergiert. Für Polynomfunktionen ist dieses Problem weitestgehend gelöst. Im Jahr 1994 gab Hartje Kriete [16] eine Abschätzung des sphärischen Flächeninhalts von Einzugsbereichen von Fixpunkten des Newtonverfahrens bei Polynomen, die eine gewisse Normierungseigenschaft erfüllen und deren Grad größer als zwei ist, an. Er bewies dabei insbesondere, dass die Größe der euklidischen Flächeninhalte der Einzugsbereiche unendlich ist. Ein wesentliches Hilfsmittel in seinem Beweis ist ein Ergebnis von Feliks Przytycki [30]. Sein Resultat besagt, dass die unmittelbaren Einzugsbereiche von Newtonfunktionen von Polynomen einfach zusammenhängend und unbeschränkt sind. Für *transzendente* ganze Funktionen, das heißt ganze Funktionen, die keine Polynome sind, liegen bisher nur wenige Arbeiten vor, die sich mit der Größe der Menge geeigneter Startwerte beschäftigen. Im Jahr 2006 bewiesen Sebastian Meyer und Dierk Schleicher [24], dass die unmittelbaren Einzugsbereiche von Fixpunkten transzendenter ganzer Funktionen einfach zusammenhängend und unbeschränkt sind.

Ziel dieser Arbeit ist es, für gewisse Klassen transzendenter Funktionen zu zeigen, dass die unmittelbaren Einzugsbereiche von Nullstellen einen unendlich großen *Flächeninhalt* besitzen. Charakteristisch für die Funktionen aus diesen Klassen ist, dass sie endliche *Ordnung* besitzen. Dabei ist für eine ganze Funktion f die Ordnung definiert als die kleinste positive Zahl ρ derart, dass

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \quad < \quad r^{\rho+\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und alle hinreichend großen $r > 0$ gilt. Unter den Klassen, die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt werden, ist die nach Edmond Nicolas Laguerre (1834 - 1886) und György Pólya (1887 -1985) benannte *Laguerre-Pólya-Klasse* ($\mathcal{LP}$) wohl die prominenteste. Sie besteht aus den Funktionen, die sich lokal gleichmäßig durch reelle Polynome mit ausschließlich reellen Nullstellen approximieren lassen. Eine Eigenschaft von Funktionen aus der Laguerre-Pólya-Klasse ist, dass ihre Ordnung maximal zwei beträgt.

Die Bedingung, dass die Ordnung der Funktionen, die wir in dieser Arbeit betrachten, endlich ist, ist notwendig. So bewies Mako E. Haruta [12], dass jeder Einzugsbereich eines Fixpunktes des Newtonverfahrens für Funktionen vom Typ $f(z) = P(z) \cdot \exp(Q(z))$, wobei P ein Polynom vom Grad größer als zwei und Q ein beliebiges Polynom ist, nur einen endlichen Flächeninhalt besitzt.

Zentral für diese Arbeit ist Satz 1, den wir in Kapitel 2 beweisen werden. Er stellt den Schlüssel für fast alle Flächeninhaltsabschätzungen dar, die wir in dieser Arbeit vorstellen werden. Um ihn formulieren zu können, benötigen wir den Begriff des *Blaschkeproduktes*. Dabei handelt es sich um eine rationale Funktion, die die Mengen $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ invariant lässt.

Satz 1 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion endlicher Ordnung ρ. Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f und U der unmittelbare Einzugsbereich von z_0 bezüglich N_f. Weiter sei $N_{f|U}$ konjugiert zu einem endlichen Blaschkeprodukt. Ferner existiere eine Abbildung $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, eine Zahl $R_0 > 1$ und eine Menge $E \subset (1, \infty)$ so, dass*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \quad \leq \quad \phi(|z|)$$

für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \in (R_0, \infty) \setminus E\} \cap U$ *gilt. Dann existiert eine positive Zahl* K *so, dass*

$$area\,(U) \quad \geq \quad K \int\limits_{[R_0,R]\setminus E} (\phi(t))^{-1}\; dt \tag{1}$$

für alle $R > R_0$ *gilt.*

Falls die Menge E klein genug ist, und die Funktion ϕ so beschaffen ist, dass das Integral aus (1) divergiert, so folgt aus Satz 1, dass der Flächeninhalt des unmittelbaren Einzugsbereichs von z_0 unendlich groß ist. Für Funktionen, deren Ordnung kleiner als zwei ist, liefert ein Satz von Gary G. Gundersen [11] die Existenz einer hinreichend kleinen Menge E und einer geeigneten Funktion ϕ. Präziser gesagt, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $E \subset (1, \infty)$ endlichen logarithmischen Maßes derart, dass

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \quad \leq \quad |z|^{\rho-1+\varepsilon} \tag{2}$$

für alle z mit $|z| \notin E$ gilt. Dabei sagen wir, eine Menge E sei endlichen logarithmischen Maßes, falls $\int_{(1,\infty)\cap E} \frac{1}{t}\, dt < \infty$ ist.

Möchte man ein ähnliches Resultat für Funktionen mit Ordnung zwei zeigen, so benötigt man eine Verschärfung der Abschätzung (2). Wir werden in Kapitel 2 zeigen, dass für jede Funktion f aus der Laguerre-Pólya-Klasse eine Konstante K derart existiert, dass

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \quad \leq \quad K|z| \tag{3}$$

für alle z aus einer hinreichend großen Teilmenge von $\mathbb{C}$ gilt. Mithilfe dieser Abschätzung beweisen wir in Kapitel 2 den folgenden Satz.

Satz 2 *Es sei* $f \in \mathcal{LP}$ *oder allgemeiner* f *von der Gestalt* $f = g \cdot P$, *wobei* $g \in \mathcal{LP}$ *und* P *ein reelles Polynom ist. Ferner sei* $z_0 \in \mathbb{C}$ *eine Nullstelle von* f *und* U *der unmittelbare Einzugsbereich von* z_0 *bezüglich* N_f. *Dann gilt*

$$area\,(U) \quad = \quad \infty.$$

Lässt man nur Funktionen zu, deren Ordnung kleiner als zwei ist, so erhält man folgende quantitative Abschätzung des Flächeninhalts nach unten. Sie liefert insbesondere, dass der Flächeninhalt der unmittelbaren Einzugsbereiche unendlich ist, falls die Ordnung der betrachteten Funktion kleiner als zwei ist.

Satz 3 *Es sei* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *eine transzendente ganze Funktion endlicher Ordnung* $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ *mit* $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, *welche nur endlich viele nicht reelle Nullstellen habe. Es sei* $z_0 \in \mathbb{C}$ *eine Nullstelle von* f *und* U *der unmittelbare Einzugsbereich von* z_0 *bezüglich* N_f. *Ferner sei* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. *Dann existiert eine Konstante* $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ *derart, dass*

$$area\,(U \cap A(0, R_0, R)) \geq R^{2-\rho-\varepsilon}$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{>2R_0}$ *gilt. Insbesondere gilt*

$$area\,(U) \quad = \quad \infty,$$

falls $\rho < 2$ *ist.*

Kapitel 1

Grundlagen

hallöchen Ziel dieses Grundlagenkapitels ist es, die wichtigsten Begriffe und Sätze, die in dieser Arbeit benötigt werden, zur Verfügung zu stellen. Wir werden zunächst einige Notationen, die wir in dieser Arbeit verwenden werden, einführen.

1.1 Notationen

Im Folgenden seien $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen. Es seien $\hat{\mathbb{C}}$ die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Für $r \in \mathbb{R}$ seien

$$\mathbb{R}_{>r} := \{x \in \mathbb{R} : x > r\},$$

$$\mathbb{R}_{\geq r} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq r\},$$

$$\mathbb{R}_{<r} := \{x \in \mathbb{R} : x < r\}$$

und

$$\mathbb{R}_{\leq r} := \{x \in \mathbb{R} : x \leq r\}.$$

Die Mengen $\mathbb{N}_{<n}$, $\mathbb{N}_{\leq n}$, $\mathbb{N}_{>n}$ und $\mathbb{N}_{\geq n}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ analog definiert. Weiter definieren wir für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 < R_0 < R \leq \infty$ die Mengen

$$B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

und

$$\mathrm{A}(z_0, R_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : R_0 < |z - z_0| < R\}.$$

Wir bezeichnen für $U \subset \mathbb{C}$ und $A \subset \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{area}(U) := \int_U dxdy$$

und

$$\operatorname{meas}(A) \quad := \quad \int_A dx$$

das Lebesgue'sche Maß der Mengen U und A. Schließlich bezeichnen wir für $z \in \mathbb{C}$ und $U \subset \mathbb{C}$ mit

$$\operatorname{dist}(z, U) \quad := \quad \inf\{|z - w| : w \in U\}$$

den Abstand von z zu U. Der Abstand bezüglich der sphärischen Metrik in $\hat{\mathbb{C}}$ bezeichnen wir mit $\widehat{\operatorname{dist}}$.

1.2 Eigentliche Abbildungen und Blaschkeprodukte

Die Funktionen, die wir in dieser Arbeit betrachten, verhalten sich in gewissen Einzugsbereichen von Fixpunkten des Newtonverfahrens wie sogenannte Blaschkeprodukte. Wie wir in diesem Abschnitt sehen werden, sind Einschränkungen von Blaschkeprodukten auf die Einheitskreisscheibe eigentliche Abbildungen. Für die Beweise der in diesem Abschnitt aufgeführten Aussagen verweisen wir auf das Buch von Steinmetz [32, S. 4 ff].

Definition 1.2.1 (Eigentliche Abbildung) Es seien U, V metrische Räume. Ferner sei $f : U \to V$ eine Abbildung. Dann heißt f **eigentlich**, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset V$ auch $f^{-1}(K)$ kompakt ist.

Definition 1.2.2 (Abbildungsgrad) Es seien $U \subset \mathbb{C}$, $V \subset \hat{\mathbb{C}}$ Gebiete und $f : U \to V$ eine meromorphe Abbildung. Ferner sei $d \in \mathbb{N}$. Dann besitzt f den **Abbildungsgrad** d, falls zu jedem $y \in V$ genau d Urbilder in U gezählt gemäß Vielfachheit existieren.

Bei dem nun folgenden Satz handelt es sich um ein klassisches Resultat. Er charakterisiert eigentliche Abbildungen. Die dritte Eigenschaft wird auch als Randfolgenkriterium bezeichnet.

Satz 1.2.1 (Charakterisierung eigentlicher Abbildungen) *Es seien $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ und $V \subset \hat{\mathbb{C}}$ Gebiete. Ferner sei $f : U \to V$ eine meromorphe Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) f ist eine eigentliche Abbildung.

(2) Es gibt ein $d \in \mathbb{N}$ derart, dass f den Abbildungsgrad d besitzt.

(3) Für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ mit

$$\widehat{dist}(z_n, \partial U) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

gilt

$$\widehat{dist}(f(z_n), \partial V) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Definition 1.2.3 (Blaschkeprodukt) Eine rationale Funktion B vom Grad $d \in \mathbb{N}$ heißt endliches **Blaschkeprodukt**, falls $b \in \mathbb{R}$ und $a_1, ..., a_d \in \mathbb{D}$ so existieren, dass

$$B(z) = \exp(ib) \prod_{j=1}^{d} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt.

Satz 1.2.2 *Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) f ist eine eigentliche Abbildung.

(2) Es existiert ein endliches Blaschkeprodukt B mit $B|_{\mathbb{D}} = f$.

Bemerkung 1.2.1 Für ein Blaschkeprodukt B sind $\mathbb{D}$, $\partial\mathbb{D}$ und $\hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}}$ vollständig invariant unter B. Das heißt, es gilt $B^{-1}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $B^{-1}(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ und $B^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

1.3 Hyperbolische Metrik

Wir werden in diesem Abschnitt zunächst den Begriff der hyperbolischen Dichte einführen. Im Anschluss daran definieren wir mit Hilfe der hyperbolischen Dichte eine Metrik, die sogenannte hyperbolische Metrik.

Definition 1.3.1 (Hyperbolisches Gebiet) Es sei $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Wir nennen U **hyperbolisch**, falls $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ mindestens drei Punkte enthält.

Definition 1.3.2 (Hyperbolische Dichte auf $\mathbb{D}$) Wir definieren

$$\varrho_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}_{>0}, \ z \mapsto \frac{2}{1 - |z|^2}$$

und nennen $\varrho_{\mathbb{D}}$ die **hyperbolische Dichte auf $\mathbb{D}$**.

Diese Metrik auf $\mathbb{D}$ induziert eine Metrik auf einfach zusammenhängenden Gebieten.

Definition 1.3.3 (Hyperbolische Dichte) Es seien $U \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : \mathbb{D} \to U$ holomorph und bijektiv. Wir definieren die **Dichte der hyperbolischen Metrik auf U** durch

$$\varrho_U(f(z))\,|f'(z)| \ := \ \varrho_{\mathbb{D}}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Bemerkung 1.3.1 Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Bijektion f. Einen Beweis findet man beispielsweise in dem Buch von Steinmetz [32, S. 12].

Wir können nun die hyperbolische Metrik auf einfach zusammenhängenden Gebieten einführen.

Definition 1.3.4 (Hyperbolische Metrik) Es sei U ein einfach zusammenhängendes hyperbolisches Gebiet und $z, w \in U$. Wir definieren

$$\rho_U(z,w) \quad := \quad \inf\left\{\int_\gamma \varrho_U(\xi)|d\xi| : \gamma \text{ ist rektifizierbare Kurve, die } z \text{ mit } w \text{ in } U \text{ verbindet}\right\}.$$

Bemerkung 1.3.2 ρ_U ist eine Metrik auf U. Wir nennen ρ_U die **hyperbolische Metrik auf** U.

Bemerkung 1.3.3 Man kann mit Hilfe des Uniformisierungssatzes noch allgemeiner als an dieser Stelle auch eine hyperbolische Metrik auf beliebigen hyperbolischen Gebieten einführen.

Bemerkung 1.3.4 In dem Fall, dass $U = \mathbb{D}$ ist, zeigt eine elementare Rechnung, dass

$$\rho_{\mathbb{D}}(z,w) \quad = \quad \log \frac{1 + \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|}{1 - \left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|} \tag{1.1}$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}$ gilt. Für einen Beweis verweisen wir auf [26, S. 372].

Wir werden nun einige klassische Abschätzungen der hyperbolischen Dichte aufführen. Für Beweise verweisen wir auf das Buch von Morosawa et al. [23]. Lemma 1.3.1, 1.3.2 und 1.3.3 gelten auch allgemeiner für beliebige hyperbolische Gebiete.

Lemma 1.3.1 *Es seien $U \subset \mathbb{C}$, $V \subset \hat{\mathbb{C}}$ einfach zusammanhängende hyperbolische Gebiete und $f : U \to V$ meromorph. Es sei $z \in U$. Dann gilt*

$$\varrho_U(z) \quad \geq \quad |f'(z)|\, \varrho_V(f(z)).$$

Ist f zusätzlich bijektiv, so gilt

$$\varrho_U(z) \quad = \quad |f'(z)|\, \varrho_V(f(z)).$$

Als Spezialfall mit $f = \mathrm{id}$ erhalten wir das folgende Lemma.

Lemma 1.3.2 *Es seien $U \subset \mathbb{C}$, $V \subset \hat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängende hyperbolische Gebiete mit $U \subset V$. Es sei $z \in U$. Dann gilt*

$$\varrho_V(z) \quad \leq \quad \varrho_U(z).$$

Mit Hilfe von Lemma 1.3.1 erhält man die folgende Kontraktionseigenschaft der hyperbolischen Metrik.

Lemma 1.3.3 *Es seien $U \subset \mathbb{C}$, $V \subset \hat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängende hyperbolische Gebiete und $f : U \to V$ meromorph. Ferner seien $z_1, z_2 \in U$. Dann gilt*

$$\rho_V(f(z_1), f(z_2)) \quad \leq \quad \rho_U(z_1, z_2).$$

Ist f bijektiv, so gilt

$$\rho_V(f(z_1), f(z_2)) \quad = \quad \rho_U(z_1, z_2).$$

Mit Hilfe des Koebeschen $\frac{1}{4}$-Satzes und des Lemmas von Schwarz kann man leicht das nun folgende Lemma beweisen.

Lemma 1.3.4 *Es sei $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein einfach zusammenhängendes hyperbolisches Gebiet. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\,\mathrm{dist}(z,\partial U)} \quad \leq \quad \varrho_U(z) \quad \leq \quad \frac{2}{\mathrm{dist}(z,\partial U)}.$$

für alle $z \in U$.

1.4 Grundlagen aus der Nevanlinnatheorie

Inhalt dieses Abschnitts ist der Zusammenhang zwischen dem Wachstum einer meromorphen Funktion und der Verteilung ihrer a-Stellen für $a \in \hat{\mathbb{C}}$. Nevanlinna veröffentlichte erste Arbeiten zu dieser Thematik in den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts. Einen guten Überblick lieferen beispielsweise die Bücher [27] und [14]. In diesem Abschnitt stellen wir lediglich einige wenige, für diese Arbeit notwendige Ausschnitte aus der Nevanlinnatheorie, dar.

Definition 1.4.1 Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion, welche nicht konstant den Wert $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ annehme. Es sei weiter $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann bezeichnen wir mit $n(r, a, f)$ die **Anzahl der a-Stellen** von f in dem Kreis $\overline{B_R(0)}$ gezählt gemäß Vielfachheit, falls $a \neq \infty$ ist. Ist $a = \infty$, so gibt $n(r, a, f)$ die Anzahl der Polstellen gezählt gemäß Vielfachheit von f an. Wir schreiben auch kurz $n(r, a)$ statt $n(r, a, f)$.

Mit Hilfe der Anzahl der a-Stellen können wir die sogenannte Nevanlinnasche Anzahlfunktion wie folgt definieren.

Definition 1.4.2 (Nevanlinnasche Anzahlfunktion) Es sei f eine meromorphe Funktion, welche nicht konstant den Wert $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ annehme. Es sei weiter $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann bezeichnen wir mit

$$N(r, a, f) := \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t}\, dt + n(0, a) \log r \tag{1.2}$$

die **Nevanlinnasche Anzahlfunktion** und schreiben dafür kurz $N(r, a)$.

Die nun folgenden Begriffe der Schmiegungsfunktion und Charakteristik sind zentrale Größen in der Nevanlinnatheorie. Um sie definieren zu können, benötigen wir zunächst die Definition des Pluslogarithmus.

Definition 1.4.3 (Pluslogarithmus) Wir nennen die Abbildung

$$\log^+ : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \max\{\log x, 0\}$$

den **Pluslogarithmus**.

Definition 1.4.4 (Nevanlinnasche Schmiegungsfunktion und Charakteristik) Es seien $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $r \in [0, R)$ und f eine in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ meromorphe Funktion. Wir definieren

$$m(r, \infty) := m(r, f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(r \exp(it))| \, dt$$

und

$$T(r, \infty) := T(r, f) := T(r) := m(r, \infty) + N(r, \infty).$$

Nimmt f nicht konstant den Wert $a \in \mathbb{C}$ an, so definieren wir

$$m(r, a, f) := m(r, a) := m(r, \frac{1}{f - a}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{f(r \exp(it)) - a} \right| \, dt$$

und
$$T(r,a,f) := T(r,a) := m(r,a) + N(r,a).$$
Wir nennen $m(r,a)$ die **Nevanlinnasche Schmiegungsfunktion** und $T(r,f)$ die **Nevanlinnasche Charakteristik**.

Bemerkung 1.4.1 Für jede nicht konstante meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ und jedes $a \in \mathbb{C}$ gilt, dass $N(r,a)$ und $T(r,f)$ monoton wachsend bezüglich r und konvex bezüglich $\log r$ sind [14, S. 59].

Nevanlinna zeigte, dass eine wechselseitige Beziehung zwischen der Menge der a-Stellen einer Funktion und ihrer Annäherung an den Wert a besteht. Er formulierte diesen Zusammenhang in dem folgenden nach ihm benannten Satz.

Satz 1.4.1 (Erster Nevanlinnascher Hauptsatz) *Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe nicht konstante Funktion, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt*
$$m(r,a) + N(r,a) \quad = \quad T(r) + O(1). \tag{1.3}$$
Das nun folgende Lemma liefert einen Vergleich zwischen den Größenordnungen der Nevanlinna Charakteristik und des Logarithmus des Maximalbetrags. Man kann es mit Hilfe der Poisson-Jensenschen-Integralformel beweisen. Um das Lemma formulieren zu können, führen wir zunächst den Begriff des Maximalbetrags ein.

Definition 1.4.5 (Maximalbetrag) Es sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und f eine in $B(0,R)$ holomorphe Funktion. Dann nennen wir für alle $r \in (0,R)$
$$M(r,f) := \max_{|z|=r} |f(z)| \tag{1.4}$$
den **Maximalbetrag** von f auf $\overline{B(0,r)}$ und schreiben dafür auch kurz $M(r)$.

Bemerkung 1.4.2 Man kann zeigen, dass eine ganze Funktion f genau dann ein Polynom ist, falls die Funktion mit der Vorschrift $r \mapsto \frac{\log M(r)}{\log r}$ beschränkt ist.

Lemma 1.4.1 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und nicht konstant. Ferner sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ genügend groß. Dann gilt*
$$T(r,f) \quad \leq \quad \log M(r,f) \quad \leq \quad 3\,T(2r,f).$$
Einen Beweis findet man beispielsweise in [14, S. 55].

1.5 Ordnung einer Funktion

Wie schon in der Einleitung motiviert, handelt es sich bei der Ordnung einer Funktion um ein Maß ihres Wachstums. Für meromorphe Funktionen gibt es folgende auf Nevanlinna [28] zurückgehende Definition der Ordnung.

Definition 1.5.1 (Ordnung einer meromorphen Funktion) Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Dann ist die **Ordnung** von f definiert durch

$$\rho(f) \quad := \quad \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}. \tag{1.5}$$

Bemerkung 1.5.1 Mit Hilfe von Lemma 1.4.1 erhält man, dass in dem Fall, dass f holomorph ist, $\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$ und $\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$ übereinstimmen, das heißt es gilt $\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$.

Bemerkung 1.5.2 Für eine ganze Funktion f der Ordnung ρ gilt

$$\log M(r,f) \quad < \quad r^{\rho+\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und alle hinreichend großen $r > 0$.

Beispiele 1.5.1

(1) Es sei p ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Konstante $K \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $M(r) \le Kr^n$ für große r ist. Folglich gilt

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} \quad \le \quad \frac{\log(\log K + n\log r)}{\log r}.$$

Es folgt $\rho(p) = 0$.

(2) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f_1(z) = \exp(z^n)$. Dann gilt

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} \quad = \quad \frac{n\log r}{\log r}.$$

Es folgt $\rho(f_1) = n$. Ganz allgemein gilt, dass die Ordnung einer Funktion f mit $f = \exp\circ p$, wobei p ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ ist, n beträgt.

(3) Es gilt hingegen für alle $n \in \mathbb{N}$, dass die Funktionen $f_n(z) = \exp(\exp(z^n))$ unendliche Wachstumsordnung besitzen, denn es ist

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} \quad = \quad \frac{nr}{\log r},$$

und somit $\rho(f_n) = \infty$.

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel und den Eigenschaften des Logarithmus kann man zeigen, dass eine ganze Funktion und ihre Ableitung dieselbe Ordnung besitzen. Einen Beweis findet man beispielsweise in [14, S. 23].

Satz 1.5.1 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Dann gilt*

$$\rho(f) \quad = \quad \rho(f'). \tag{1.6}$$

Wir möchten diesen Abschnitt mit einem Lemma abschließen, mit dessen Hilfe man die Ordnung eines Produktes von Funktionen endlicher Ordnung abschätzen kann.

Lemma 1.5.1 *Es seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei ganze Funktionen. Es gelte $\rho(f) < \infty$ und $\rho(g) < \infty$. Dann ist auch $f \cdot g$ endlicher Ordnung und es gilt*

$$\rho(f \cdot g) \quad \leq \quad \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$$

Beweis: Es sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $M(r, f) \leq M(r, g)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\log\log(M(r, f \cdot g))}{\log r} &= \frac{\log\log(M(r, f) \cdot M(r, g))}{\log r} \\
&= \frac{\log(\log M(r, f) + \log M(r, g))}{\log r} \\
&\leq \frac{\log(2\log M(r, g))}{\log r} \\
&= \frac{\log 2 + \log\log M(r, g)}{\log r},
\end{aligned}$$

und somit $\rho(f \cdot g) \leq \rho(g)$.

□

Bemerkung 1.5.3 Durch eine analoge Rechnung erhält man

$$\rho(f + g) \quad \leq \quad \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$$

Es gelten die gleichen Aussagen auch für meromorphe Funktionen. Da man für ihre Beweise nicht mehr den Maximalbetrag sondern nur noch die Nevanlinnacharakteristik zur Verfügung hat, gestalten sich die Rechnungen in den Beweisen langwieriger als die obigen, sind aber gleichermaßen elementar. Einen Beweis findet man zum Beispiel in dem Buch von Jank und Volkmann [14, S. 99 ff].

Satz 1.5.2 *Es seien $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei meromorphe Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen.*

1. *Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ gilt*

$$\rho(f) \quad = \quad \rho\left(\frac{a \cdot f + b}{c \cdot f + d}\right),$$

   falls f nicht konstant den Wert $-\frac{d}{c}$ annimmt.

2. *Es gilt*

$$\rho(f \cdot g) \quad \leq \quad \max\{\rho(f), \rho(g)\},$$

$$\rho(f + g) \quad \leq \quad \max\{\rho(f), \rho(g)\}$$

   und

$$\rho(f - g) \quad \leq \quad \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$$

1.6 Weierstraßsche Produktentwicklung

Mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra ist es möglich, jedes Polynom als Produkt von Linearfaktoren darzustellen. In den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts bewies Weierstraß, dass eine analoge Darstellung ganzer Funktionen möglich ist [25, S. 11 ff]. Um diesen Satz formulieren zu können, führen wir zunächst den Begriff des sogenannten Weierstraßschen Primfaktors ein.

Definition 1.6.1 (Weierstraßscher Primfaktor) Es seien $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\mathcal{E}(z,0) := 1 - z \quad \text{und} \quad \mathcal{E}(z,n) := (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}\right)$$

und nennen $\mathcal{E}(z,n)$ **Weierstraßscher Primfaktor**.

Mit Hilfe dieser Definition sind wir nun in der Lage, den Weierstraßschen Produktsatz zu formulieren.

Satz 1.6.1 (Weierstraßscher Produktsatz) *Es sei f eine ganze Funktion, welche in Null eine Nullstelle der Vielfachheit $n \in \mathbb{N}$ besitzt. Es seien $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Nullstellen von f, welche ungleich Null sind, gezählt gemäß Vielfachheit. Dann existieren eine Folge natürlicher Zahlen $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und eine ganze Funktion h so, dass*

$$f(z) \quad = \quad z^n \exp(h(z)) \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(\frac{z}{z_k}, q_k\right) \tag{1.7}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Bemerkung 1.6.1 Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}(\frac{z}{z_k}, q_k)$ wird auch **Weierstraßprodukt** oder **kanonisches Produkt** genannt. Es konvergiert lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$, falls die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{z}{z_k}\right|^{q_k+1} \tag{1.8}$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Bemerkung 1.6.2 Wählt man $q_k = k - 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Reihe in (1.8).

Bemerkung 1.6.3 Falls eine Zahl $q \in \mathbb{N}_0$ derart existiert, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{q+1}} \tag{1.9}$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$ konvergiert, so konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{z}{z_k}\right|^{q+1}$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$. In diesem Fall kann man also in Satz 1.6.1 die Wahl $q_k = q$ für alle $k \in \mathbb{N}$ treffen.

Bemerkung 1.6.4 Man kann mit Hilfe partieller Integration zeigen, dass die Konvergenz der Reihe in (1.9) äquivalent ist zu der Konvergenz des Integrals

$$\int_1^\infty \frac{n(r,0)}{r^{q+2}}\,dr. \tag{1.10}$$

Einen Beweis dafür findet man beispielsweise in dem Buch von Nevanlinna [27, S. 217 ff].

Bemerkung 1.6.5 Es sei

$$q \;:=\; \min\left\{ r \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{r+1}} < \infty \right\}. \tag{1.11}$$

Falls die Funktion h aus Satz 1.6.1 ein Polynom ist und zusätzlich $q_k = q < \infty$ ist, so sagen wir, dass die Funktion f **endliches Geschlecht** besitzt. Es heißt dann

$$g \;:=\; \max\{\deg(h), p\}$$

das **Geschlecht** von f. Dabei bezeichnen wir mit $\deg(h)$ den Grad von h.

Bemerkung 1.6.6 Ist in Satz 1.6.1 die Ordnung der Funktion f endlich und $q \in \mathbb{N}$ wie in (1.11), so erhalten wir durch die Wahl von $q_k = q$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dass h ein Polynom ist.

Es gilt also folgende Variante des Weierstraßschen Produktsatzes, die auch Hadamardscher Produktsatz genannt wird.

Satz 1.6.2 (HadamardscherProduktsatz 1) *Es sei f eine ganze Funktion endlicher Ordnung, welche in Null eine Nullstelle der Vielfachheit $n \in \mathbb{N}$ besitzt. Es seien $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Nullstellen von f, welche ungleich Null sind, gezählt gemäß Vielfachheit. Dann existieren $q \in \mathbb{N}_0$ und ein Polynom P so, dass*

$$f(z) \;=\; z^n \exp(P(z)) \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(\frac{z}{z_k}, q\right) \tag{1.12}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Für meromorphe Funktionen gelten zu den Sätzen 1.6.1 und 1.6.2 analoge Ergebnisse. Wir werden an dieser Stelle nur das Analogon zu Satz 1.6.2 formulieren.

Satz 1.6.3 (Hadamardscher Produktsatz 2) *Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung. Es seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Nullstellen von f und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Polstellen von f, wobei die Null- und Polstellen gemäß Vielfachheit gezählt werden. Dann existieren $q \in \mathbb{N}_0$ und ein Polynom P derart, dass f die Darstellung*

$$f(z) \;=\; \exp(P(z)) \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(\frac{z}{a_k}, q\right)}{\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(\frac{z}{b_k}, q\right)} \tag{1.13}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ besitzt.

Bemerkung 1.6.7 Es sei

$$m \quad := \quad \min\left\{q \in \mathbb{N}_0 : \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_k}\right|^{q+1} < \infty, \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{b_k}\right|^{q+1} < \infty\right\}.$$

und $\deg(P)$ der Grad von P. Dann heißt

$$g \quad := \quad \max\{m, \deg(P)\}$$

das **Geschlecht** der meromorphen Funktion f, falls $q = m < \infty$ ist.

Nevanlinna [28, S. 1 ff] bewies 1925, dass für meromorphe Funktionen endlicher Ordnung ein Zusammenhang zwischen der Ordnung und dem Geschlecht einer Funktion besteht. Insbesondere zeigte er, dass das Geschlecht einer Funktion endlicher Ordnung niemals ihre Ordnung übersteigen kann. Es gilt der folgende Satz.

Satz 1.6.4 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ferner sei $g \in \mathbb{N}_0$ das Geschlecht von f. Dann gilt*

$$g \quad \leq \quad \rho \quad \leq \quad g + 1.$$

Mit Hilfe von Satz 1.6.4 erhält man folgendes Korollar.

Korollar 1.6.1 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g \in \mathbb{N}_0$ das Geschlecht von f. Ist ρ nicht ganzzahlig, so gilt*

$$g \quad = \quad \max\{n \in \mathbb{N} : n < \rho\}.$$

Ist ρ ganzzahlig, so gilt

$$g \quad \in \quad \{\rho - 1, \rho\}.$$

Mit Hilfe des Geschlechts einer ganzen Funktion kann man ihren Maximalbetrag abschätzen. Es gilt der folgende Satz, für den man einen Beweis beispielsweise in [8, S. 283] findet.

Satz 1.6.5 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $g \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ das Geschlecht von f. Es sei weiter $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann existiert $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass*

$$|f(z)| \quad < \quad \exp\left(\alpha |z|^{g+1}\right) \tag{1.14}$$

für alle $z \in A(0, R_0, \infty)$ gilt.

1.7 Die Laguerre-Pólya-Klasse

In diesem Abschnitt möchten wir eine für diese Arbeit wichtige Funktionenklasse, die sogenannte Laguerre-Pólya-Klasse, vorstellen. Benannt wurde sie nach Edmond Nicolas Laguerre (1834 - 1886) und György Pólya (1887 -1985).

Definition 1.7.1 (Die Laguerre-Pólya-Klasse) Es sei $\mathcal{P}$ die Klasse aller reellen Polynome, welche nur reelle Nullstellen besitzen. Die **Laguerre-Pólya-Klasse** ist definiert als

$$\mathcal{LP} \;:=\; \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ ganz} \,\big|\, \exists\, (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} p_n = f\}.$$

In ihren Arbeiten zeigen Laguerre [17] und Pólya [29], dass Funktionen f aus der Laguerre-Pólya-Klasse auch eine explizite Darstellung besitzen. Es gilt der folgende Satz.

Satz 1.7.1 *Es ist $f \in \mathcal{LP}$ genau dann, wenn $a \in \mathbb{R}_{\leq 0}$, $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und eine reelle Folge $(x_k)_{k=1}^N$ mit $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{{x_k}^2} < \infty$ derart existieren, dass*

$$f(z) \;=\; \exp\left(az^2 + bz + c\right) z^n \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{x_k}\right) \exp\left(\frac{z}{x_k}\right) \tag{1.15}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Bemerkung 1.7.1 Die Laguerre-Pólya-Klasse ist bezüglich Differentiation abgeschlossen. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Ableitungen reeller Polynome, die ausschließlich reelle Nullstellen besitzen, auf Grund des Satzes von Rolle auch nur reelle Nullstellen besitzen. Denn für jedes reelle Polynom P vom Grad d mit nur reellen Nullstellen gilt mit dem Satz von Rolle, dass P' genau $d-1$ nicht reelle Nullstellen besitzt. Da der Grad von P' aber $d-1$ beträgt, sind dies die einzigen Nullstellen von P'. Dies liefert zusammen mit den Sätzen von Weierstraß und Hurwitz, dass für Funktionen f aus $\mathcal{LP}$ auch die Ableitung f' eine $\mathcal{LP}$-Funktion ist.

Bemerkung 1.7.2 Satz 1.6.4 liefert zusammen mit der Darstellung aus (1.15), dass die Ordnung von Funktionen aus $\mathcal{LP}$ durch zwei beschränkt ist.

Bemerkung 1.7.3 Mit Hilfe von Bemerkung 1.6.4 erhält man, dass für Funktionen aus der Laguerre-Pólya-Klasse

$$\int_1^\infty \frac{n(r,0)}{r^3}\, dr \;<\; \infty \tag{1.16}$$

gilt.

Bemerkung 1.7.4 Für die logarithmische Ableitung $\frac{f'}{f}$ von Funktionen aus der Laguerre-Pólya-Klasse folgt aus Satz 1.7.1

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; 2az + b + \frac{n}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{a_k(z-a_k)}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Es gilt daher

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \;=\; 2a - \frac{n}{z^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-a_k)^2} \;<\; 0$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Folglich ist für jedes Teilintervall $I \subset \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$ die Abbildung $\frac{f'}{f}_{|I}$ streng monoton fallend.

Bemerkung 1.7.5 Mit Hilfe von Satz 1.6.5 erhält man, dass für jede Funktion f aus der Laguerre-Pólya-Klasse eine Konstante $K \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, so dass

$$\log M(r,f) \;\leq\; Kr^2$$

für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Wir möchten diesen Abschnitt mit einigen Beispielen abschließen.

Beispiele 1.7.1

(1) Die Funktion $f(z) = \exp(z)$ ist in $\mathcal{LP}$, da $f(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ ist. In der expliziten Darstellung in Satz 1.7.1 ist dann $a = 0$, $b = -1$, $c = 0$ und $n = 0$.

(2) Die Funktion $f(z) = \sin(\pi z)$ ist in $\mathcal{LP}$, da $f(z) = \lim_{n\to\infty} \pi z \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$ ist. Es gilt andererseits $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=-\infty}^{\infty}(1-\frac{z}{k})\exp(\frac{z}{k})$. In der expliziten Darstellung in Satz 1.7.1 ist dann $a = 0$, $b = 0$, $c = \ln \pi$ und $n = 1$.

(3) Die Funktion $f(z) = \exp(z^2)$ ist nicht in $\mathcal{LP}$, da $f''(z) = (4z^2+2)\,f(z)$ die nicht reelle Nullstelle $\sqrt{2}\,i$ besitzt. Dass $f \notin \mathcal{LP}$ ist, kann man auch leicht mit Hilfe von Satz 1.7.1 zeigen. Da $f(z) = \exp(1\cdot z^2)$ und $a = 1 \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist, liefert Satz 1.7.1, dass f keine $\mathcal{LP}$-Funktion ist.

1.8 Singularitäten der Umkehrfunktion

In diesem Abschnitt führen wir zunächst die auf Iversen [13] zurückgehenden Begriffe der transzendenten und der algebraischen Singularität der Umkehrfunktion einer meromorphen Funktion ein. Anschließend stellen wir den Zusammenhang zwischen einer transzendenten Singularität der Umkehrfunktion und einem asymptotischen Wert her. Wir werden diesen Abschnitt mit einem Satz von Ahlfors abschließen, der eine Abschätzung der Anzahl der direkten transzendenten Singularitäten der Umkehrfunktion einer meromorphen Funktion mit Hilfe der Ordnung der Funktion liefert.

Definition 1.8.1 (Singularitäten der Umkehrfunktion) Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion und $w \in \hat{\mathbb{C}}$. Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ bezeichnen wir mit $\hat{B}_\varepsilon(w)$ die Kreisscheibe um w mit Radius ε bezüglich der sphärischen Metrik. Für jedes $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $U(r)$ eine Komponente von $f^{-1}(\hat{B}_r(w))$ derart, dass für alle r_1, $r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $r_1 < r_2$ schon $U(r_1) \subset U(r_2)$ gilt. Es sei $U : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}, r \mapsto U(r)$. Es gibt nun zwei mögliche Fälle:

(1) Es existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\bigcap_{r>0} U(r) = \{z\}$. In diesem Fall gilt $f(z) = w$. Falls $w \in \mathbb{C}$ und $f'(z) \neq 0$ ist oder $w = \infty$ und z eine einfache Polstelle ist, nennen wir z einen **gewöhnlichen Punkt**. Ist hingegen $w \in \mathbb{C}$ und $f'(z) = 0$ oder ist $w = \infty$ und z eine mehrfache Polstelle, so sagen wir, z sei ein **kritischer Punkt** und nennen dann w einen **kritischen Wert**. Wir sagen auch, der kritische Punkt z **liege über** w beziehungsweise, dass die Wahl von U eine **algebraische Singularität der Umkehrfunktion von** f definiere.

(2) Es ist $\bigcap_{r>0} U(r) = \emptyset$. In diesem Fall sagen wir, dass die Wahl von U eine **transzendente Singularität der Umkehrfunktion von** f definiert.

Eine transzendente Singularität U der Umkehrfunktion über w heißt **direkt**, falls es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ derart gibt, dass $f(z) \neq w$ für alle $z \in U(r)$ gilt. Andernfalls heißt sie **indirekt**. Liefert die Wahl von U eine Singularität der Umkehrfunktion von f, nennen wir U auch kurz eine Singularität, beziehungsweise wir sagen, die Singularität U **liege über** w.

Bemerkung 1.8.1 Es können sowohl mehrere transzendente Singularitäten als auch kritische Punkte über demselben Punkt liegen.

Beispiele 1.8.1

(1) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto \exp(z)$. Dann definiert die Abbildung

$$U : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}, r \mapsto \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) < \log r\},$$

eine direkte Singularität über 0.

(2) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2(1-z)\exp(z)$. Es sei $\widehat{\operatorname{diam}}(\hat{\mathbb{C}})$ der Durchmesser von $\hat{\mathbb{C}}$ bezüglich der sphärischen Metrik. Weiter seien

$$U_1 : (0, \widehat{\operatorname{diam}}(\hat{\mathbb{C}})) \to \mathbb{C}, r \mapsto U_1(r),$$

$$U_2 : (0, \widehat{\operatorname{diam}}(\hat{\mathbb{C}})) \to \mathbb{C}, r \mapsto U_2(r)$$

und

$$U_3 : (0, \widehat{\operatorname{diam}}(\hat{\mathbb{C}})) \to \mathbb{C}, r \mapsto U_3(r),$$

wobei $U_1(r)$ die Komponente von $f^{-1}(\hat{B}_r(0))$ sei, die eine linke Halbebene enthält, $U_2(r)$ die Komponente von $f^{-1}(\hat{B}_r(0))$ sei, die 0 enthält und $U_3(r)$ die Komponente von $f^{-1}(\hat{B}_r(1))$ sei, die 1 enthält. Dann definiert U_1 eine direkte Singularität über 0 und U_2 einen kritischen Punkt über 0. Mit der Wahl von U_3 ist 0 hingegen ein gewöhnlicher Punkt.

Wir definieren nun den Begriff des asymptotischen Wertes und stellen im nächsten Satz den Zusammenhang zum Begriff der transzendenten Singularität her.

Definition 1.8.2 (Asymptotischer Wert und asymptotischer Weg) Es seien $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion und $w \in \hat{\mathbb{C}}$. Wir nennen w einen **asymptotischen Wert von** f, falls es eine Kurve $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft gibt, dass

$$\lim_{t\to\infty} f(\Gamma(t)) = w$$

und

$$\lim_{t\to\infty} \Gamma(t) = \infty$$

gilt. Wir nennen eine solche Kurve Γ auch einen **zu** w **gehörigen asymptotischen Weg**.

Beispiel 1.8.1 Es ist für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2(1-z)\exp(z)$ aus dem obigen Beispiel die Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to (-\infty, 0), t \mapsto -t$ ein zu dem asymptotischen Wert 0 gehörender asymptotischer Weg.

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen asymptotischen Werten und transzendenten Singularitäten.

Satz 1.8.1 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion und $w \in \hat{\mathbb{C}}$. Falls U eine über w liegende transzendente Singularität von f ist, so ist w ein asymptotischer Wert von f. Falls umgekehrt w ein asymptotischer Wert von f ist, so existiert mindestens eine transzendente Singularität U von f über w.*

Der folgende Satz liefert eine Charakterisierung der Singularitäten der Umkehrfunktion.

Satz 1.8.2 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion und $w \in \hat{\mathbb{C}}$ sei eine Singularität der Umkehrfunktion von f.*

(1) Falls w ein asymptotischer Wert ist, so existieren ein Punkt $z \in \mathbb{C}$, ein in einer Umgebung von z definierter Zweig ϕ der Umkehrfunktion von f und ein z mit w verbindender Weg $\Gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ so, dass ϕ für jedes $t \in [0, 1)$ längs des Weges $\Gamma_{|[0,t]}$, jedoch nicht längs Γ analytisch fortgesetzt werden kann. Es gilt dann

$$\phi(\Gamma(t)) \to \infty \quad \textit{für} \quad t \to 1.$$

(2) Falls w ein kritischer Wert ist, so existieren $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = w$, ein in einer Umgebung von z definierter Zweig ϕ der Umkehrfunktion von f und ein z mit w verbindender Weg $\Gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ so, dass ϕ für jedes $t \in [0, 1)$ längs des Weges $\Gamma_{|[0,t]}$, jedoch nicht längs Γ analytisch fortgesetzt werden kann derart, dass

$$\phi(\Gamma(t)) \to z \quad \textit{für} \quad t \to 1$$

gilt.

Die folgende Abschätzung stammt von Carlemann [7]. Wir geben hier eine Version an, wie man sie beispielsweise in dem Buch von Tsuji [33, S. 233] findet.

Satz 1.8.3 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein unbeschränktes Gebiet und es bestehe ∂U aus höchstens abzählbar vielen analytischen Kurven. Es sei $v : \overline{U} \to [-\infty, \infty)$ eine Funktion, welche auf U subharmonisch und auf $\overline{U}$ stetig ist. Es existiere ferner eine Konstante $K \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $|v(z)| = K$ für $z \in \partial U$ und $|v(z)| > K$ für $z \in U$ gilt. Für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ seien $b_r := U \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $r\theta(r)$ das lineare Maß von b_r und*

$$\widetilde{\theta}(r) := \begin{cases} \theta(r) & , \quad \text{falls} \quad \partial D(0,r) \not\subset U \\ \infty & , \quad \text{falls} \quad \partial D(0,r) \subset U. \end{cases}$$

Dabei setzen wir $\frac{1}{r\widetilde{\theta}(r)} := 0$ sei, falls $r\widetilde{\theta}(r) = \infty$ ist. Weiter sei $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ so gewählt, dass $b_{R_0} \neq \emptyset$ ist. Dann gilt

$$\log\left(\max_{|z|=R} v(z)\right) \quad \geq \quad \pi \int_{R_0}^{\kappa R} \frac{1}{t\widetilde{\theta}(t)}\, dt - \mathcal{O}(1)$$

für alle $\kappa \in (0,1)$ und $R \in \mathbb{R}_{>R_0/\kappa}$.

Bemerkung 1.8.2 Ein solches Gebiet U wird auch als **direkter Trakt** bezeichnet.

Bemerkung 1.8.3 Für eine meromorphe Funktion f, die eine direkte Singularität über ∞ hat, existiert ein direkter Trakt. Durch die Wahl von U ist $U(r)$ für hinreichend kleines $r > 0$ ein direkter Trakt. Entsprechend werden für beliebige direkte Singularitäten, die nicht zwangsläufig über ∞ liegen müssen, die Mengen $U(r)$ für hinreichend kleines $r > 0$ auch als **Trakt** bezeichnet.

Mit Hilfe von Satz 1.8.3 können wir folgendes Ergebnis herleiten.

Satz 1.8.4 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion, welche eine direkte transzendente Singularität $a \in \mathbb{C}$ besitzt. Es sei $U = U(t)$ wie in der Definition der direkten Singularität, das heißt U ist eine Komponente von $f^{-1}(\widehat{B}_t(a))$ für ein $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und es gilt $f(z) \neq a$ für alle $z \in U$. Für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ seien $b_r, \theta(r)$ und $\widetilde{\theta}(r)$ wie in Satz 1.8.3. Es sei $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ so gewählt, dass $b_{R_0} \neq \emptyset$ ist. Dann gilt*

$$\log T(R,f) \quad \geq \quad \pi \int_{R_0}^{\kappa R} \frac{1}{t\widetilde{\theta}(t)}\, dt - \mathcal{O}(1)$$

für alle $\kappa \in (0,1)$ und $R \in \mathbb{R}_{>R_0/\kappa}$.

Beweis: Es sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B_\delta(a) \subset \widehat{B}_t(a)$ und $V \subset \mathbb{C}$ eine Komponente von $f^{-1}(B_\delta(a))$ mit $|f(z) - a| = \delta$ für $z \in V$ und $|f(z) - a| > \delta$ für $z \in \partial V$. Wir definieren die Abbildungen

$$g : \overline{V} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \frac{\delta}{|f(z) - a|}$$

und

$$v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}\,, \quad z \mapsto \begin{cases} \log|g(z)| & , \text{falls } z \in V \\ 0 & , \text{falls } z \notin V\,. \end{cases}$$

Es ist v auf V harmonisch und stetig und subharmonisch auf $\mathbb{C}$. Es sei $\kappa \in (0,1)$ und $K \in \mathbb{R}_{>1}$ mit $\kappa K < 1$. Wir definieren $\widetilde{\kappa} := \kappa K$. Dann gilt mit Satz 1.8.3

$$\log\left(\max_{|z|=R} v(z)\right) \;\geq\; \pi \int\limits_{R_0}^{\widetilde{\kappa} R} \frac{1}{t\widetilde{\theta}(t)}\, dt - \mathcal{O}(1) \tag{1.17}$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{>R_0/\widetilde{\kappa}}$. Die Poissonsche Integralformel liefert

$$\begin{aligned} v(z) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R\exp(it))\frac{R^2 - |z|^2}{|R\exp(it) - z|}\; dt \\ &\leq \frac{R + |z|}{R - |z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R\exp(it))\; dt \end{aligned}$$

für $|z| < R$. Mit $|z| = r = R/K$ folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R\exp(it))\; dt \;\geq\; \frac{K-1}{K+1}\max_{|z|=r} v(z). \tag{1.18}$$

Wir erhalten mit (1.17) und (1.18)

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R\exp(it))\; dt\right) &\geq \log\left(\frac{K-1}{K+1}\right) + \log\left(\max_{|z|=r} v(z)\right) \\ &\geq \pi \int\limits_{R_0}^{\widetilde{\kappa} r} \frac{1}{t\widetilde{\theta}(t)}\, dt - \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Es gilt weiter

$$\begin{aligned} m(R, \frac{1}{f-a}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|g(R\exp(it))|\; dt - \mathcal{O}(1) \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R\exp(it))\; dt - \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Schließlich gilt mit dem ersten Nevanlinnaschen Hauptsatz

$$m(R, \frac{1}{f-a}) \;\leq\; T(R, \frac{1}{f-a}) \;=\; T(R,f) - \mathcal{O}(1). \tag{1.21}$$

Es folgt mit (1.19), (1.20) und (1.21)

$$\begin{aligned} \log T(R,f) &\geq \log(m(R, \frac{1}{f-a})) + \mathcal{O}(1) \;\geq\; \log\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R\exp(it))\; dt\right) \\ &\geq \pi \int\limits_{R_0}^{\widetilde{\kappa} r} \frac{1}{t\widetilde{\theta}(t)}\, dt - \mathcal{O}(1) \;=\; \pi \int\limits_{R_0}^{\kappa R} \frac{1}{t\widetilde{\theta}(t)}\, dt - \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

□

Ein weiteres Ergebnis, das man mit Hilfe von Satz 1.8.3 zeigen kann, ist der folgende Satz, der einen Zusammenhang zwischen der Ordnung einer meromorphen Funktion und der Anzahl ihrer direkten transzendenten Singularitäten herstellt. Da die Aussage leicht aus Satz 1.8.3 folgt, und da wir ein ähnliches Argument im Beweis von Satz 2.3.1 verwenden, möchten wir an dieser Stelle einen Beweis angeben. Man findet Beweise dieses Satzes beispielsweise in den Büchern [33, S. 236] oder [27, S. 303 ff].

Satz 1.8.5 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorph und es sei $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Ordnung von f. Für $\rho \geq 1/2$ ist die Anzahl der direkten transzendenten Singularitäten höchstens gleich 2ρ und für $\rho < 1/2$ ist die Anzahl der direkten transzendenten Singularitäten höchstens gleich* 1.

Beweis: Es sei N die Anzahl der direkten Singularitäten von f. Ohne Einschränkung sei $N \geq 2$. Es seien $U_1, \ldots, U_N$ die zugehörigen Trakte. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 1.8.3 und mit Hilfe von Satz 1.8.3

$$\log T(R, f) \quad \geq \quad \pi \int_{R_0}^{\kappa R} \frac{1}{t\widetilde{\theta}(t)}\, dt - \mathcal{O}(1) \tag{1.22}$$

für alle $\kappa \in (0, 1)$, $j \in \mathbb{N}_{\leq N}$ und $R \in \mathbb{R}_{>R_0/\kappa}$. Da f die Ordnung ρ besitzt, gilt

$$\log T(R, f) \quad \leq \quad (\rho + \varepsilon) \log R \tag{1.23}$$

für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $j \in \mathbb{N}_{\leq N}$. Mit Hilfe von (1.22) und (1.23) folgt

$$N(\rho + \varepsilon) \log R \quad \geq \quad \pi \int_{R_0}^{\kappa R} \frac{1}{t} \sum_{k=j}^{N} \frac{1}{\widetilde{\theta}_j(t)}\, dt - \mathcal{O}(1).$$

Da $N \geq 2$ ist, gilt $\theta_j(t) \neq \infty$ für alle für alle genügend große $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir können daher ohne Einschränkung annehmen, dass $\theta_j(t) \neq \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>R_0}$ gilt. Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz liefert dann

$$N^2 \quad = \quad \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\widetilde{\theta}_j(t)}{\widetilde{\theta}_j(t)} \right)^2 \quad \leq \quad \left(\sum_{k=1}^{N} \widetilde{\theta}_j(t) \right) \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\widetilde{\theta}_j(t)} \right) \quad \leq \quad 2\pi \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\widetilde{\theta}_j(t)}$$

für alle $t \in [R_0, \kappa R]$ mit $\widetilde{\theta}_j(t) \neq 0$. Es folgt

$$N(\rho + \varepsilon) \log R \quad \geq \quad \frac{N^2}{2} \int_{R_0}^{\kappa R} \frac{1}{t}\, dt - \mathcal{O}(1) \quad = \quad \frac{N^2}{2} \log R - \mathcal{O}(1).$$

Hieraus folgt $\rho \leq 2N$. □

1.9 Periodische Punkte

In dieser Arbeit interessieren wir uns für die anziehenden Fixpunkte der Newtonabbildung N_f einer holomorphen Funktion f. Es ist daher insbesondere das lokale Verhalten in einer Umgebung eines solchen Fixpunktes relevant. In diesem Abschnitt möchten wir einige klassische Ergebnisse über das lokale Verhalten von Funktionen in der Nähe periodischer Punkte vorstellen. Die Beweise dieser Sätze findet man beispielsweise in dem Buch von Milnor [22, S.76, ff].

Zunächst aber werden wir die periodischen Punkte meromorpher Funktionen klassifizieren.

Definition 1.9.1 (Klassifikation periodischer Punkte) Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein periodischer Punkt der Periode $p \in \mathbb{N}$ von f, das heißt, es gilt $f^p(z_0) = z_0$. Wir nennen z_0

1. **attraktiv**, falls $\left|(f^p)'(z_0)\right| < 1$ ist,
2. **indifferent**, falls $\left|(f^p)'(z_0)\right| = 1$ ist und
3. **repulsiv**, falls $\left|(f^p)'(z_0)\right| > 1$ ist.

Bemerkung 1.9.1 Man bezeichnet $\lambda := (f^p)'(z_0)$ auch als den **Multiplikator** des Fixpunktes z_0.

Man kann durch eine elementare Rechnung einsehen, dass die Folge der Iterierten $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann lokal in einer Umgebung eines Fixpunktes gegen diesen konvergiert, falls dieser attraktiv ist.

Definition 1.9.2 (Einzugsbereich) Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein periodischer Punkt der Periode $p \in \mathbb{N}$ von f. Es sei die Menge $\mathcal{A}$ definiert durch $\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} f^{pn}(z) \to z_0\}$ und es sei $\mathcal{A}_0$ die Komponente von $\mathcal{A}$, die z_0 enthält. Dann heißt $\mathcal{A}$ der **Einzugsbereich** von z_0 und $\mathcal{A}_0$ der **unmittelbare Einzugsbereich** von z_0.

Für eine meromorphe Funktion f lässt sich das lokale Verhalten der Funktion in Umgebungen von attraktiven und repulsiven periodischen Punkten gut beschreiben. Es sei λ der Multiplikator eines solchen periodischen Punktes. Mittels einer Konjugation erhält man, dass sich die Funktion f^p lokal wie die Funktion $z \mapsto \lambda z$ verhält. Der nun folgende Satz, der dieses lokale Verhalten beschreibt, stammt von Kœnigs [15].

Satz 1.9.1 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Abbildung und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein periodischer Punkt der Periode $p \in \mathbb{N}$ von f mit $|(f^p)'(z_0)| \notin \{0,1\}$. Dann existieren eine Umgebung V von 0, eine Umgebung U von z_0 und eine biholomorphe Funktion $\Phi : V \to U$ mit $\phi(0) = z_0$ und $\Phi'(0) = 1$ derart, dass*

$$f^p(\Phi(z)) \quad = \quad \Phi((f^p)'(z_0)\, z) \tag{1.24}$$

für alle $z \in V$ mit $\left((f^p)'(z_0)\right) \cdot z \in V$ gilt.

Bemerkung 1.9.2 Die Funktion Φ aus Satz 1.9.1 ist in dem Sinne eindeutig bestimmt, dass es zu einer Umgebung V von 0 höchstens eine solche Abbildung Φ gibt.

Bemerkung 1.9.3 Es ist auch in anderen Situationen, als in den eben beschriebenen, möglich, Funktionen zu konjugieren. So ist eine Konjugation mit Hilfe der sogenannten Böttcherschen Funktionalgleichung möglich, falls ein attraktiver periodischer Punkt mit Multiplikator Null vorliegt. Auch in dem Fall, dass der vorliegende periodische Punkt indifferent und sein Multiplikator eine Einheitswurzel ist, ist eine Konjugation mit Hilfe der sogenannten Abelschen Funktionalgleichung möglich. In diesem Fall ist es ebenfalls möglich, eine Aussage über das Iterationsverhalten von Funktionen in geeigneten Gebieten zu treffen. Der Satz, der dieses Iterationsverhalten und die Gebiete des Fixpunktes beschreibt, ist auch unter dem Namen Flowertheorem bekannt. Die Namensgebung liegt an der Form der der Gebiete, in denen das Iterationsverhalten beschrieben wird. Diese sehen wie Blütenblätter um den periodischen Punkt aus. Auch für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf das Buch von Milnor [22, S. 104 ff].

Satz 1.9.2 (Flowertheorem) *Es sei f eine ganze, rationale oder meromorphe Funktion und z_0 ein Fixpunkt von f mit Multiplikator 1. Dann existieren $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit*

$$f(z) \quad = \quad z + a(z - z_0)m + 1 + \mathcal{O}\left((z - z_0)^{m+2}\right)$$

für $z \to z_0$. Weiter existieren einfach zusammenhängende Gebiete $U_0, \ldots, U_{m-1}$ mit folgenden Eigenschaften für alle $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.

1. *Es gilt $U_k \subset \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{2\pi k - arg(a)}{m} < arg\,(z - z_0) < \frac{2\pi(k+1) - arg(a)}{m}\right\}$.*
2. *Es gilt $z_0 \in \partial U_k$.*
3. *Es ist ∂U_k glatt außer möglicherweise in z_0.*
4. *Es ist ∂U_k in z_0 tangential an $\left\{z \in \mathbb{C} : arg\,(z - z_0) \in \left\{\frac{2\pi k - arg(a)}{m}, \frac{2\pi(k+1) - arg(a)}{m}\right\}\right\}$.*
5. *Es gilt $f\,(U_k) \subset U_k$.*
6. *Die Folge $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf U_k lokal gleichmäßig gegen z_0.*

In dieser Arbeit interessieren wir uns für die Einzugsbereiche der attraktiven Fixpunkten der Funktion $N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$, wobei f eine ganze Funktion ist. 1989 bewies Przytycki [30], dass in dem Fall, dass die Funktion f ein Polynom ist, die Einzugsbereiche der attraktiven Fixpunkte von N_f einfach zusammenhängend und unbeschränkt sind. Meyer und Schleicher [24] weiteten 2006 dieses Ergebnis für ganze Funktionen aus und bewiesen den folgenden Satz.

Satz 1.9.3 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Es sei U der unmittelbare Einzugsbereich von z_0 bezüglich N_f. Dann ist U einfach zusammenhängend und unbeschränkt.*

1.10 Fatou- und Juliamengen

Die Mengen, die wir in diesem Abschnitt betrachten, sind nach Gaston Julia (1893 - 1978) und Pierre Fatou (1878 - 1929) benannt. Beide veröffentlichten in den Jahren 1918 bis 1920 parallel Arbeiten, die sich mit dem Iterationsverhalten rationaler Funktionen beschäftigten. In diesen Arbeiten zerlegten sie die komplexe Ebene in zwei disjunkte Mengen, die wir heute nach ihnen als die Julia- und Fatoumenge bezeichnen. Fatou wählte den Zugang über normale Familien. Er betrachtete für eine rationale Funktion f die Menge jener Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$, in denen die Folge der Iterierten von f normal ist. Diese Menge wird heute nach ihm als die Fatoumenge bezeichnet. Ihr Komplement nennen wir die Juliamenge. Julia analysierte für rationale Funktionen den Abschluss der Menge aller repulsiven periodischen Punkte. Er bewies, dass die Menge, die er betrachtete, dem Komplement der Menge entspricht, mit der sich Fatou beschäftigte. Fatou zeigte, dass das Komplement der Menge, die er untersuchte, mit dem Abschluss aller repulsiven periodischen Punkte übereinstimmt. Dass diese Mengen auch für ganze Funktionen identisch sind, bewies 1968 I. Noel Baker [2].

Im Gegensatz zu den oben genannten Arbeiten betrachten wir in dieser Arbeit meromorphe Funktionen. Viele Ergebnisse aus der Iterationstheorie von rationalen und ganzen Funktionen lassen sich auf meromorphe Funktionen übertragen. Einen guten Überblick liefert der Artikel [5] von Walter Bergweiler. Wir werden an dieser Stelle lediglich einige grundlegende Eigenschaften von Julia- und Fatoumengen vorstellen, die für das Verständnis dieser Arbeit notwendig oder auch nützlich sind.

Wir werden in diesem Abschnitt dem Zugang Fatous folgen. Um die Fatoumenge einführen zu können, benötigen wir daher zunächst den Begriff der Normalität.

Definition 1.10.1 (Normale Familien) Es sei $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen und $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen von U nach $\hat{\mathbb{C}}$. Wir nennen $\mathcal{F}$ **normal**, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Für $z_0 \in U$ nennen wir $\mathcal{F}$ **normal in** z_0, falls eine Umgebung V von z_0 so existiert, dass $\{f|_V : f \in \mathcal{F}\}$ normal ist.

Definition 1.10.2 (Fatou- und Juliamenge) Es sei $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Dann nennen wir

$$\mathcal{F}(f) := \Big\{ z \in \hat{\mathbb{C}} : f^n \text{ ist für alle } n \in \mathbb{N} \text{ in einer Umgebung von } z \text{ definiert und } \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist normal in } z \Big\}$$

die **Fatoumenge von** f und

$$\mathcal{J}(f) := \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(f)$$

die **Juliamenge von** f.

Mit Hilfe des Satzes von Arzela-Ascoli kann man zeigen, dass das Iterationsverhalten einer meromorphen Funktion f in der Fatoumenge stabil ist. Das bedeutet, dass man für jeden Punkt aus der Fatoumenge eine Umgebung um diesen Punkt findet, in dem das Iterationsverhalten von f ähnlich ist. Für Punkte aus der Juliamenge ist das hingegen nicht möglich. Betrachtet man hier eine beliebige Umgebung eines solchen Punktes, so kann man nicht prognostizieren, wie sich Punkte aus dieser Umgebung unter Iteration verhalten.

Beispiel 1.10.1 Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$. Dann ist $\mathcal{F}(f) = \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}$ und $\mathcal{J}(f) = \partial\mathbb{D}$. Für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt $\lim_{n\to\infty}(f^n(z)) = 0$. Für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ gilt $\lim_{n\to\infty}(f^n(z)) = \infty$. Hingegen gilt für jeden Punkt $w \in \partial\mathbb{D}$ und jede Umgebung U von w, dass Punkte unter Iteration entweder auf dem Einheitskreis bleiben, gegen 0 konvergieren oder gegen ∞ konvergieren.

Offensichtlich sieht man anhand der Definition der Fatou- und Juliamenge, dass die Fatoumenge offen in $\hat{\mathbb{C}}$ ist und dementsprechend die Juliamenge abgeschlossen in $\hat{\mathbb{C}}$ ist. Eine weitere Eigenschaft, die man leicht anhand der Definition der Fatoumenge erkennen kann, ist die vollständige Invarianz der Fatoumenge und der Juliamenge. Das heißt, es gilt

$$f^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f)$$

und

$$f^{-1}(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f) \setminus \{\infty\}.$$

Schließlich kann man für jede meromorphe Funktion f und jede bijektive meromorphe Funktion g zeigen, dass

$$\mathcal{F}(f \circ g^{-1} \circ f) = g(\mathcal{F}(f))$$

und

$$\mathcal{J}(f \circ g^{-1} \circ f) = g(\mathcal{J}(f))$$

gilt. Daher ist es häufig nützlich, Funktionen zu konjugieren und dann das Iterationsverhalten der konjugierten Funktion zu untersuchen.

Wir möchten nun einen Zusammenhang zu dem vorigen Kapitel über periodische Punkte herstellen. Es ist möglich, für gewisse periodische Punkte eine Aussage zu treffen, ob sie in der Julia- oder der Fatoumenge liegen.

Lemma 1.10.1 *Es sei f eine meromorphe Funktion und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein abstoßender oder rational indifferenter periodischer Punkt. Dann gilt $z_0 \in \mathcal{J}(f)$.*

Bemerkung 1.10.1 Dieses Lemma gilt auch in dem Fall, dass f ganz oder rational ist.

Einen Beweis für das nun folgende Lemma findet man beispielsweise in dem Buch von Milnor [22, S.147].

Lemma 1.10.2 *Es sei f eine rationale Funktion. Dann besitzt f einen Fixpunkt, der abstoßend ist oder dessen Multiplikator den Wert 1 hat.*

Mit Hilfe von Lemma 1.10.2 kann man herleiten, dass für rationale Funktionen die Juliamenge nicht leer ist. Die Eigenschaft, dass die Juliamenge nicht leer ist, gilt nicht nur für rationale Funktionen sondern auch allgemein für ganze und meromorphe Funktionen.

Für anziehende periodische Punkte existiert eine Umgebung, in der die Folge der Iterierten gegen den periodischen Punkt konvergiert. Daher liegen attraktive periodische Punkte in der Fatoumenge. Es gilt daher offensichtlich das folgende Lemma.

Lemma 1.10.3 *Es sei f meromorph, ganz oder rational und z_0 ein periodischer Punkt von f. Es sei $\mathcal{A}$ der Einzugsbereich von z_0. Dann gilt $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}(f)$.*

Es besteht der folgende Zusammenhang zwischen der Juliamenge einer Funktion und dem Einzugsbereich eines attraktiven periodischen Punktes der Funktion. Für einen Beweis verweisen wir auf das Buch von Milnor [22, S.48].

Satz 1.10.1 *Es sei f rational, ganz oder meromorph und z_0 ein attraktiver periodischer Punkt von f. Dann gilt $\mathcal{J}(f) = \partial\mathcal{A}(z_0)$.*

Da der Rand eines jeden Einzugsbereiches schon die gesamte Juliamenge ist, wird beispielsweise für Funktionen, die drei unterschiedliche anziehende Fixpunkte besitzen, klar, dass die Juliamenge eine komplizierte Struktur haben muss.

Kapitel 2

Einzugsbereiche des Newtonverfahrens

2.1 Abschätzungen der logarithmischen Ableitung

Wie wir in Abschnitt 1.7 gesehen haben, sind Funktionen aus der Laguerre-Pólya-Klasse reell und besitzen ausschließlich reelle Nullstellen. Wir haben auch festgestellt, dass ihre Ordnung höchstens zwei ist. Wir werden zeigen, dass für jede Funktion $f \in \mathcal{LP}$ eine Konstante $K > 0$ derart existiert, dass

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq K|z| \tag{2.1}$$

für eine hinreichend große Menge von Werten $z \in \mathbb{C}$ gilt. Mit Hilfe dieser Abschätzung können wir dann beweisen, dass der direkte Einzugsbereich eines Fixpunktes der Newtonabbildung N_f von f unendlichen Flächeninhalt besitzt, falls N_f auf dem Einzugsbereich zu einem endlichen Blaschkeprodukt konjugiert ist.

Wir benötigen daher in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels häufig Abschätzungen der logarithmischen Ableitung einer transzendenten ganzen Funktion. Die Beweise für diese Abschätzungen möchten wir in diesen Abschnitt auslagern.

Wir werden diesen Abschnitt mit klassischen Abschätzungen, die man mit Hilfe der Poisson-Jensen-Nevanlinna-Formel herleiten kann und mit Abschätzungen von Macintyre und Fuchs beginnen. Diese Abschätzungen stellen ein zentrales Hilfsmittel sowohl für die Abschätzungen, die wir in diesem Abschnitt machen wollen, als auch für Abschätzungen von Gundersen, die wir benutzen möchten, dar.

Als eine direkte Anwendung der Poisson-Jensen-Nevanlinnaschen Integralformel erhält man folgendes Lemma. Einen Beweis dieses Lemmas findet man beispielsweise in dem Buch von Jank und Volkmann [14, S. 65].

Lemma 2.1.1 *Es sei f eine nicht konstante ganze Funktion und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Ferner seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Nullstellen von f. Dann gilt*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{6}{\pi r}\int_0^{2\pi} \left|\log|f((3r/2)\exp(it))|\right| \, dt + \sum_{|a_k|<3r/2} \left|\frac{1}{z-a_k} + \frac{\overline{a_k}}{9r^2/4 - \overline{a_k}z}\right|$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$.

Mit Hilfe des ersten Nevanlinnaschen Hauptsatzes kann man die rechte Seite der Ungleichung aus Lemma 2.1.1 weiter abschätzen und erhält daraus dann den folgenden Satz.

Satz 2.1.1 *Es sei f eine nicht konstante ganze Funktion und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Ferner seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Nullstellen von f. Dann gilt*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \quad \leq \quad \frac{32}{r} T(2r, f) + \sum_{|a_k|<3r/2} \frac{2}{|z - a_k|} \tag{2.2}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$.

Die Summe aus Satz 2.1.1 lässt sich mit einem Lemma von Macintyre und Fuchs [20, S.164] abschätzen. Wir möchten dieses Lemma an dieser Stelle in der folgenden Version angeben.

Lemma 2.1.2 *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann existiert eine Menge $B_h \subset \mathbb{R}_{>0}$ mit $\operatorname{meas}(B_h) \leq 2h$ derart, dass*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z - a_k|} \quad < \quad \frac{n}{h} \log(1 + \log n) \tag{2.3}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \notin B_h$ gilt.

Wir werden im Folgenden häufig den Begriff des logarithmischen Maßes verwenden. Wir sagen, dass eine Menge $E \subset \mathbb{R}$ **endlichen logarithmischen Maßes** sei, falls

$$\int\limits_{E\cap(1,\infty)} \frac{1}{t}\, dt \quad < \quad \infty$$

ist.

Satz 2.1.1 und Lemma 2.1.2 sind wichtige Hilfsmittel in dem Beweis der folgenden Abschätzungen von Gundersen [11, S. 90].

Lemma 2.1.3 *Es sei f ganz und von endlicher Ordnung $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ferner sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann existiert eine Menge $E \subset (1, \infty)$ endlichen logarithmischen Maßes derart, dass*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \quad \leq \quad |z|^{\rho-1+\varepsilon}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \notin (E \cup [0, 1])$ gilt.

Lemma 2.1.4 *Es sei f ganz und von endlicher Ordnung $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ferner sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann existieren eine Menge $E \subset (1, \infty)$ mit $\int_E \frac{1}{t} dt < \infty$ und eine Konstante $K_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, welche nur von α abhängt, derart, dass*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \quad \leq \quad K_1 \left(\frac{T(\alpha|z|, f)}{|z|} (\log|z|)^\alpha \log T(\alpha|z|, f)\right) \tag{2.4}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \notin (E \cup [0, 1])$ gilt.

Uns stehen nun die nötigen Hilfsmittel zur Verfügung, um eine Abschätzung vom Typ (2.1) herleiten zu können.

Lemma 2.1.5 *Es seien $f \in \mathcal{LP}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Nullstellen von f. Dann existiert eine Konstante $K_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq K_2|z| + \sum_{|a_k|<\frac{3}{2}R} \frac{2}{|z-a_k|}$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in A\,(0, R/2, R)$ gilt.

Beweis: Es sei $R \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach Bemerkung 1.7.5 existiert eine Konstante $K \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass

$$\log M(r,f) \leq K\,r^2 \tag{2.5}$$

für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Folglich ist $\log M(2R,f) \leq 4KR^2$. Mit Lemma 1.4.1 folgt

$$\frac{32}{R}T(2R,f) \leq \frac{32}{R}\log M(2R,f). \tag{2.6}$$

Wir erhalten mit der Setzung $K_2 := 256K$ und den Ungleichungen (2.5) und (2.6)

$$\frac{32}{R}T(2R,f) \leq 128KR \leq 256K|z| = K_2\,|z|$$

für alle $z \in \mathrm{A}\,(0, R/2, R)$. Es folgt dann mit Satz 2.1.1

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{32}{r}T(2r,f) + \sum_{|a_k|<3r/2} \frac{2}{|z-a_k|} \leq K_2\,|z| + \sum_{|a_k|<\frac{3}{2}R} \frac{2}{|z-a_k|} \tag{2.7}$$

für alle $z \in \mathrm{A}\,(0, R/2, R)$. □

Als nächstes möchten wir die Summe aus (2.7) abschätzen. Dafür benötigen wir neben Lemma 2.1.2 auch das folgende Lemma als Hilfsmittel.

Lemma 2.1.6 *Es sei $f \in \mathcal{LP}$. Dann existiert eine streng monoton steigende Folge positiver reeller Zahlen $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ∞ konvergiert, mit*

$$n(R_k,0) \leq \frac{R_k^2}{\log R_k} \tag{2.8}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt weiter

$$n(t,0) \leq \frac{4t^2}{\log t} \tag{2.9}$$

für alle $t \in \{[R_k/2, R_k] : k \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: Nach Bemerkung 1.7.3 gilt für Funktionen $f \in \mathcal{LP}$

$$\int_1^\infty \frac{n(r,0)}{r^3}\, dr \quad < \quad \infty.$$

Andererseits gilt

$$\int_{r=1}^\infty \frac{1}{r\log r}\, dr \quad = \quad \infty.$$

Also existiert eine streng monoton steigende Folge positiver reeller Zahlen $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ∞ konvergiert mit

$$\frac{n(R_k,0)}{R_k^3} \quad \leq \quad \frac{1}{R_k \log R_k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$n(R_k,0) \quad \leq \quad \frac{R_k^2}{\log R_k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Ohne Einschränkung sei $R_1 > 9$. Es gilt dann

$$n(t,0) \quad \leq \quad n(R_k,0) \quad \leq \quad \frac{R_k^2}{\log R_k} \quad \leq \quad \frac{(2t)^2}{\log t} \quad = \quad \frac{4t^2}{\log t}$$

für alle $t \in \{[R_k/2, R_k] : k \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Wir haben nun alle nötigen Hilfsmittel zur Verfügung, um unsere gewünschte Abschätzung zu machen.

Lemma 2.1.7 *Es sei $f \in \mathcal{LP}$. Dann existieren eine Konstante $K_3 \in \mathbb{R}_{>0}$, eine streng monoton steigende Folge positiver reeller Zahlen $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ∞ konvergiert, und für alle $k \in \mathbb{N}$ Mengen $B_k \subset \mathbb{R}$ mit* $\operatorname{meas}(B_k) \leq \frac{1}{4}R_k$ *derart, dass*

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \quad \leq \quad K_3|z| \tag{2.10}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \in \{[R_k/2, R_k] \setminus B_k : k \in \mathbb{N}\}$ gilt.

Beweis: Es sei $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge aus Lemma 2.1.6. Dann existieren nach Lemma 2.1.2 für alle $k \in \mathbb{N}$ Mengen $B_k \subset \mathbb{R}$ mit $\operatorname{meas}(B_k) \leq \frac{1}{4}R_k$ derart, dass

$$\sum_{|a_k|<R_k} \frac{1}{|z-a_k|} \quad < \quad \frac{n(R_k,0)}{\frac{1}{8}R_k} \log\left(1+\log n(R_k,0)\right) \tag{2.11}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \in \{[R_k/2, R_k] \setminus B_k : k \in \mathbb{N}\}$ gilt. Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \in [R_k/2, R_k] \setminus B_k$. Es folgt dann mit (2.8) und (2.11)

$$\begin{aligned}
\sum_{|a_k|<R_k} \frac{2}{|z-a_k|} &\leq 2\,\frac{n(R_k,0)\log(1+\log n(R_k,0))}{1/8\,R_k} \;\leq\; 16\,\frac{{R_k}^2}{R_k\log R_k}\log\left(1+\log\frac{{R_k}^2}{\log R_k}\right)\\
&\leq 16\,\frac{R_k}{\log R_k}\log\left(1+\log\left({R_k}^2\right)\right) \;\leq\; 16\,\frac{R_k}{\log R_k}\log\left(4\log\left(R_k\right)\right)\\
&\leq 16\,\frac{R_k}{\log R_k}4\log R_k \;=\; 64\,R_k \;\leq\; 128|z|.
\end{aligned}$$

Das heißt, es ist

$$\sum_{|a_k|<R_k} \frac{2}{|z-a_k|} \;\leq\; 128|z|. \tag{2.12}$$

Es sei $K_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ die Konstante aus Lemma 2.1.5. Dann gilt mit Lemma 2.1.5, (2.12) und $K_3 := K_2 + 128$

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \;\leq\; K_2|z| + \sum_{|a_k|<R_k} \frac{2}{|z-a_k|} \;\leq\; K_2|z| + 128|z| \;=\; K_3|z|.$$

□

2.2 Einzugsbereiche, auf denen die Newtonfunktion zu einem Blaschkeprodukt konjugiert ist

Ziel dieser Arbeit ist es, für reelle transzendente ganze Funktionen, deren Geschlecht 0 oder 1 ist, zu zeigen, dass die Flächeninhalte der Einzugsbereiche von Nullstellen eine gewisse Mindestgröße haben. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass wir eine geeignete Abschätzung der Flächeninhalte nach unten machen können, falls die zu der betrachteten Funktion gehörige Newtonabbildung auf einem solchen Einzugsbereich zu einem endlichen Blaschkeprodukt konjugiert ist.

Die Grundidee ist dabei die folgende. Für den unmittelbaren Einzugsbereich U eines Fixpunktes $z_0 \in \mathbb{C}$ einer ganzen transzendenten reellen Funktion f werden wir zeigen, dass

$$\operatorname{area}\left(U \cap \mathrm{A}(0,R_0,R)\right) \;\geq\; \int_{R_0}^{R} \operatorname{dist}(z_t,\partial U)\,dt$$

gilt, wobei z_t ein beliebiger Punkt aus U mit $|z_t| = t$ ist. Falls wir mit Hilfe einer geeigneten Abschätzung von $\operatorname{dist}(z_t,\partial U)$ zeigen können, dass das Integral $\int_{R_0}^{\infty} \operatorname{dist}(z_t,\partial U)\,dt$ divergiert, erhalten wir die gewünschte Aussage. Es wird sich herausstellen, dass wir eine geeignete untere Schranke von $\operatorname{dist}(z_t,\partial U)$ erhalten, falls wir eine geeignete obere Schranke für den Betrag der logarithmischen Ableitung finden können.

Zunächst aber werden wir als Generalvoraussetzung für diesen Abschnitt die folgenden Vereinbarungen treffen.

Generalvoraussetzung:

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Die zugehörige Newtonabbildung N_f ist dann definiert durch

$$N_f(z) \quad = \quad z - \frac{f(z)}{f'(z)} \tag{2.13}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Es sei U der unmittelbare Einzugsbereich von z_0 bezüglich N_f.

Lemma 2.2.1 *Es sei $N_{f|U}$ konform konjugiert zu einem endlichen Blaschkeprodukt B. Dann existieren eine unbeschränkte Kurve Γ in U und Konstanten $R_0 \in \mathbb{R}_{>1}$, $K_4 \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass*

$$\rho_U\left(z, N_f(z)\right) \leq K_4 \tag{2.14}$$

für alle $z \in Spur\,\Gamma \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$ gilt.

Beweis: Es sei $\phi : U \to \mathbb{D}$ die Konjugationsabbildung, die $N_{f|U}$ zu einem Blaschkeprodukt konjugiert mit $\phi(z_0) = 0$. Dann gilt $B = \phi \circ N_f \circ \phi^{-1}$. Nach Lemma 1.10.2 besitzt B mindestens einen Fixpunkt $w \in \hat{\mathbb{C}}$, der abstoßend ist oder dessen Multiplikator 1 ist. Da $\mathbb{D}$, $\partial\mathbb{D}$ und $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ unter B vollständig invariant sind, gilt

$$\mathcal{J}(B) \subset \ \partial\mathbb{D}.$$

Da nach Lemma 1.10.1 abstoßende und rational indifferente Fixpunkte in der Juliamenge liegen, gilt $w \in \partial\mathbb{D}$.

Wäre der Multiplikator 1, so würde nach Satz 1.9.2 die Folge der Iterierten $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf gewissen Teilmengen von $\mathbb{D}$ gegen w konvergieren. Dies wäre ein Widerspruch dazu, dass $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{D}$ gegen 0 konvergiert.

Nach Satz 1.9.1 ist B in einer Umgebung von w zu der Abbildung $z \mapsto B'(w)z$ konjugiert. Die Abbildung $z \mapsto B'(w)z$ ist eine Drehstreckung. Wäre $B'(w)$ keine positive reelle Zahl, so würde es Punkte aus $\mathbb{D}$ geben, die durch B auf $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ abgebildet werden würden. Da $\mathbb{D}$ vollständig invariant unter B ist, wäre dies ein Widerspruch. Es folgt, dass $B'(w) \in \mathbb{R}_{>0}$ ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $w = 1$. Es sei $\gamma = \mathrm{id}_{|[0,1]}$ und $\Gamma := \phi^{-1} \circ \gamma$. Es gilt

$$B(1-\delta) \quad = \quad 1 - B'(1)\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$$

für $\delta \to 0$. Wir erhalten dann mit der Bemerkung 1.3.4

$$\begin{aligned}
&\rho_{\mathbb{D}}\left(1-\delta, B\left(1-\delta\right)\right)\\
= \ & \log \frac{1+|1-B'(1)\delta+\mathcal{O}(\delta^2)-(1-\delta)|\,|1-(1-\delta)(1-B'(1)\delta+\mathcal{O}(\delta^2))|^{-1}}{1-|1-B'(1)\delta+\mathcal{O}(\delta^2)-(1-\delta)|\,|1-(1-\delta)(1-B'(1)\delta+\mathcal{O}(\delta^2))|^{-1}}\\
= \ & \log \frac{|B'(1)\delta-\mathcal{O}(\delta^2)+\delta-B'(1)\delta^2+\mathcal{O}(\delta^3)|+|\delta(1-B'(1))+\mathcal{O}(\delta^2)|}{|B'(1)\delta-\mathcal{O}(\delta^2)+\delta-B'(1)\delta^2+\mathcal{O}(\delta^3)|-|\delta(1-B'(1))+\mathcal{O}(\delta^2)|}\\
= \ & \log \frac{|B'(1)-\mathcal{O}(\delta)+1-B'(1)\delta+\mathcal{O}(\delta^2)|+|1-B'(1)+\mathcal{O}(\delta)|}{|B'(1)-\mathcal{O}(\delta)+1-B'(1)\delta+\mathcal{O}(\delta^2)|-|1-B'(1)+\mathcal{O}(\delta)|}\\
\to \ & \log \frac{|B'(1)+1|+|1-B'(1)|}{|B'(1)+1|-|1-B'(1)|} = \log \frac{(B'(1)+1)+(B'(1)-1)}{(B'(1)+1)-(B'(1)-1)} = \log B'(1).
\end{aligned}$$

für $\delta \to 0$. Es ist Γ eine Kurve in U und es gilt $B(1)=1$. Wir erhalten mit Lemma 1.3.3

$$\begin{aligned}
\rho_U\left(\Gamma(1-\delta, N_f(1-\delta))\right) &= \rho_U\left(\phi^{-1}(1-\delta), N_f(\phi^{-1}(1-\delta))\right)\\
&= \rho_U\left(\phi{-}1(1-\delta), \phi^{-1}(B(1-\delta))\right)\\
&= \rho_{\mathbb{D}}\left(1-\delta, B(1-\delta)\right) \to \log\left(B'(1)\right) \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Würden eine Folge positiver reeller Zahlen $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen 0 konvergiert, und eine Zahl $\xi \in \mathbb{C}$ existieren mit $\lim_{n\to\infty}\Gamma(1-\delta_n)=\xi$, so würden wir mit (2.15) erhalten, dass $N_f(\Gamma(1-\delta_n))$ für $n\to\infty$ gegen $\xi\in\partial U$ konvergieren würde. Folglich wäre ξ ein Fixpunkt von N_f. Es würde also ein Fixpunkt von N_f in ∂U liegen. Dies wäre ein Widerspruch, da N_f ausschließlich anziehende Fixpunkte besitzt. Also gilt $\lim_{t\to1}\Gamma(t)=\infty$.

□

Das nachfolgende Lemma ist ein wichtiges Hilfsmittel für die Größenabschätzungen der Flächeninhalte von Einzugsbereichen U, auf denen N_f zu einem endlichen Blaschkeprodukt konjugiert ist.

Lemma 2.2.2 *Es sei $N_{f|U}$ konform konjugiert zu einem endlichen Blaschkeprodukt. Ferner seien $R_0\in\mathbb{R}_{>0}$ die Konstante und Γ die Kurve aus Lemma 2.2.1. Dann existiert eine Konstante $K_5\in\mathbb{R}_{>0}$ so, dass*

$$dist(z,\partial U) \geq K_5\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right| \qquad (2.16)$$

für alle $z\in Spur(\Gamma)\cap\{z\in\mathbb{C}:|z|>R_0\}$ gilt.

Beweis: Es sei $z\in\mathrm{Spur}(\Gamma)\cap\{z\in\mathbb{C}:|z|>R_0\}$. Weiter sei $\gamma:[0,T]\to U$ eine Geodätische bezüglich der hyperbolischen Metrik, welche nach Bogenlänge parametrisiert ist, die z mit $N_f(z)$ miteinander verbindet. Das heißt, es ist $\gamma(0)=z$, $\gamma(T)=N_f(z)$ und $|\gamma'(t)|=1$ für alle $t\in[0,1]$. Es gilt dann

$$\rho_U\left(z, N_f(z)\right) = \int_\gamma \varrho_U(w)\,|dw|.$$

Weiter gilt aufgrund der Mittelwertungleichung

$$|z - \gamma(t)| \;=\; |\gamma(0) - \gamma(t)| \;\leq\; t \tag{2.17}$$

für alle $t \in [0, T]$. Insbesondere gilt

$$|N_f(z) - z| \;\leq\; T. \tag{2.18}$$

Es sei $K_4 \in \mathbb{R}_{>0}$ die Konstante aus Lemma 2.2.1. Es gilt dann mit Lemma 1.3.4 und Lemma 2.2.1

$$K_4 \;\geq\; \int_\gamma \varrho_U(w)\,|dw| \;\geq\; \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}(w, \partial U)}\,|dw|. \tag{2.19}$$

Aus (2.17) erhalten wir

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{dist}(z, \partial U) + |z - \gamma(t)|}\,dt \;\geq\; \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial U) + t}\,dt. \tag{2.20}$$

Schließlich liefert (2.18)

$$\log\left(1 + \frac{T}{\operatorname{dist}(z, \partial U)}\right) \;\geq\; \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{|N_f(z) - z|}{\operatorname{dist}(z, \partial U)}\right). \tag{2.21}$$

Insgesamt erhalten wir mit (2.19), (2.20) und (2.21)

$$\begin{aligned}
K_4 \;&\geq\; \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}(w, \partial U)}\,|dw| \;\geq\; \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial U) + |z - w|}\,|dw| \\
&=\; \frac{1}{2}\int_0^T \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{dist}(z, \partial U) + |z - \gamma(t)|}\,dt \;\geq\; \frac{1}{2}\int_0^T \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial U) + t}\,dt \\
&=\; \log\frac{\operatorname{dist}(z, \partial U) + T}{\operatorname{dist}(z, \partial U)} \;=\; \log\left(1 + \frac{T}{\operatorname{dist}(z, \partial U)}\right) \\
&\geq\; \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{|N_f(z) - z|}{\operatorname{dist}(z, \partial U)}\right) \;=\; \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial U)}\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right|\right).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\operatorname{dist}(z, \partial U) \;\geq\; \frac{1}{(\exp(2K_4) - 1)}\left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right|.$$

□

Der folgende Satz liefert ein Kriterium dafür, dass eine meromorphe Funktion auf ihrem unmittelbaren Einzugsbereich zu einem Blaschkeprodukt konjugiert ist.

Satz 2.2.1 *Es enthalte U keine transzendente Singularität von N_f und höchstens endlich viele kritische Punkte von N_f. Dann ist $N_{f|U} : U \to U$ konjugiert zu einem Blaschkeprodukt.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $N_{f|U} : U \to U$ eine eigentliche Abbildung ist. Wir führen den Beweis durch Kontraposition. Es sei also $N_{f|U} : U \to U$ keine eigentliche Abbildung. Folglich existiert nach Satz 1.2.1 eine Randfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U derart, dass $(N_f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ keine Randfolge in U ist.

Dann existieren ein $w \in U$ und eine Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} N_f(z_{n_k}) = w$. Ohne Einschränkung sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

<ins>1. Fall:</ins> Für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ besitzt ${N_f}^{-1}(B_r(w))$ höchstens endlich viele Komponenten in U.

<ins>Annahme:</ins> Es gilt $z_n \not\to \infty$ für $n \to \infty$.
Es sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Komponenten von ${N_f}^{-1}(B_r(w))$. Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann existieren $U_1 \ldots, U_n \subset U$ offen mit $\overline{U_j}$ kompakt für alle $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$, und $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ derart, dass

$$\left|{N_f}^{-1}(v) \cap U_j\right| \;=\; \lambda_j$$

für alle $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ und $v \in B_\varepsilon(w) \setminus \{w\}$ gilt. Folglich existiert eine Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ mit

$$z_{n_k} \in U_j$$

für alle z_{n_k}. Da $\overline{U_j}$ kompakt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\overline{U_j}$ konvergiert. Es sei $\widetilde{z} = \lim_{k\to\infty} z_{n_k}$. Da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Randfolge ist, folgt, dass $\widetilde{z} \in \partial U \subset \mathcal{J}(N_f)$ ist. Da die Juliamenge vollständig invariant ist, folgt, dass $N_f(\widetilde{z}) \in \mathcal{J}(N_f)$ist, und somit $N_f(\widetilde{z}) = w$. Dies ist ein Widerspruch, da $w \in U \subset \mathcal{F}(N_f)$.

Also gilt $z_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Da ${N_f}^{-1}(B_r(w))$ in U nur endlich viele Komponenten besitzt, ist mindestens eine davon unbeschränkt. Die Wahl dieser Komponente liefert, dass über w eine transzendente Singularität der Umkehrfunktion von f liegt.

<ins>2. Fall:</ins> Es existiert ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass ${N_f}^{-1}(B_r(w))$ unendlich viele endlich viele Komponenten $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in U besitzt.

Es sei $\psi : U \to \mathbb{D}$ biholomorph mit $\psi(w) = 0$. Ohne Einschränkung enthalten nur endlich viele Komponenten von ${N_f}^{-1}(B_r(w))$ einen kritischen Punkt von N_f. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ derart, dass W_n für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ keinen kritischen Punkt von N_f enthält. Wir wählen nun für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ maximale Radien $r_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit der Eigenschaft, dass auf $B_{r_n}(0)$ ein Zweig der Umkehrfunktion von $f \circ \psi^{-1}$ existiert und bezeichnen die Zweige der Umkehrfunktion mit ϕ_n. Es gilt dann $r_n \leq 1$. Wäre für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ der maximale Radius $r_n = 1$, erhalten wir einen Widerspruch, da dann einerseits ein Zweig der Umkehrfunktion auf ganz $\mathbb{D}$ existiert, es aber andererseits Zweige der Umkehrfunktion gibt, die sich nicht fortsetzen lassen. Also gilt $r_n < 1$. Da wir angenommen haben, dass nur endlich viele kritische Punkte von N_f vorliegen und zu jedem kritischen Wert höchstens endlich viele kritische Punkte gehören, besitzt N_f demzufolge unendlich viele transzendente Singularitäten.

□

Das nun folgende Lemma macht eine Aussage über den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Nullstellen einer ganzen reellen Funktion und der Anzahl der Nullstellen ihrer Ableitungen.

Lemma 2.2.3 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine reelle transzendente Funktion endlicher Ordnung $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche nur endlich viele nicht reelle Nullstellen habe. Dann haben f' und f'' nur endlich viele nicht-reelle Nullstellen.*

Beweis: Es sind f' und f'' ebenfalls reelle Funktionen. Es sei $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl der nicht reellen Nullstellen. In [21, S. 1045] beweist Marden, dass dann f' höchstens $\rho + m$ nicht reelle Nullstellen besitzt. Analog folgt, da die Ordnung von f' wegen Satz 1.5.1 auch ρ beträgt, dass auch f'' höchstens $2\rho + m$ nicht reelle Nullstellen hat.

□

Die Tatsache, dass f' höchstens $\rho+m$ nicht reelle Nullstellen besitzt, ist ein Spezialfall eines Satzes von Borel [6]. Es seien dazu x_1 und x_2 zwei Nullstellen von f mit $x_1 < x_2$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in (x_1, x_2)$. Nach dem Satz von Rolle ist die Anzahl der Nullstellen von f', die sich zwischen x_1 und x_2 befinden, ungerade. Falls f' zwischen x_1 und x_2 genau $2k+1$ Nullstellen besitzt, so sagen wir, dass f' zwischen x_1 und x_2 genau $2k$ **zusätzliche Nullstellen** besitzt. Besitzt f eine größte Nullstelle $x_{\max}$ oder kleinste Nullstelle $x_{\min}$, so wird jede Nullstelle von f', die in $(x_{\max}, \infty)$ beziehungsweise in $(-\infty, x_{\min})$ liegt, als zusätzliche Nullstelle bezeichnet. Wir bezeichnen mit $Z(f')$ die Anzahl der zusätzlichen Nullstellen von f' und mit $C(f')$ die Anzahl der nicht reellen Nullstellen von f'. Dann besagt der Satz von Borel folgendes.

Satz 2.2.2 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine reelle transzendente Funktion endlicher Ordnung $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, welche nur endlich viele nicht reelle Nullstellen habe, und deren Ableitung f' selbst auch eine reelle Funktion sei. Dann gilt*

$$Z(f') + C(f') \quad \leq \quad C(f) + \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq \rho\}$$

Der nun folgende Satz ist ein Schlüsselsatz für die Beweise aller weiteren Aussagen über die Größe von Einzugsbereichen von Fixpunkten des Newtonverfahrens, die wir im Rahmen dieser Arbeit treffen wollen. Er besagt grob gesprochen, dass gewisse Einzugsbereiche groß sind, falls man eine geeignete obere Schranke für die logarithmische Ableitung hat.

Satz 2.2.3 *Es sei $N_{f|U}$ konjugiert zu einem endlichen Blaschkeprodukt und $R_0 \in \mathbb{R}_{>1}$ die Konstante aus Lemma 2.2.1. Es existieren ferner eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ und eine Menge $E \subset (1, \infty)$ derart, dass*

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \quad \leq \quad \phi(|z|)$$

für alle $z \in A(0, R_0, \infty) \cap U$ *mit* $|z| \notin E$ *gilt. Dann existiert eine Konstante* $K_6 \in \mathbb{R}_{>0}$ *so, dass*

$$area\,(U \cap A(0, R_0, R)) \;\geq\; K_6 \int\limits_{[R_0,R]\setminus E} \frac{1}{\phi(t)}\, dt$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{>R_0}$ *gilt.*

Beweis: Es sei $z \in A(0, R_0, \infty) \cap U$, und es gelte $|z| \notin E$. Es sei $K_5 \in \mathbb{R}_{>0}$ die Konstante aus Lemma 2.2.2. Dann gilt

$$|N_f(z) - z| \;=\; \left|\frac{f(z)}{f'(z)}\right| \;\geq\; \frac{1}{\phi(|z|)}.$$

Für alle $t \in [R_0, R]$ sei $b_t := U \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = t\}$ und $t\theta(t)$ das lineare Maß von b_t. Es sei weiter Γ die Kurve aus Lemma 2.2.1. Ferner sei $z_t \in b_t \cap \Gamma$. Mit Lemma 2.2.2 folgt

$$\begin{aligned}
&\operatorname{area}(U \cap \mathrm{A}(z_0, R_0, R)) \\
=\;& \int\limits_{R_0}^{R} \theta(t)t\, dt \;\geq\; \int\limits_{R_0}^{R} \frac{\operatorname{dist}(z_t, \partial U)}{t}\, t\, dt \;=\; \int\limits_{R_0}^{R} \operatorname{dist}(z_t, \partial U)\, dt \\
\geq\;& \int\limits_{[R_0,R]\setminus E} \operatorname{dist}(z_t, \partial U)\, dt \;\geq\; K_5 \int\limits_{[R_0,R]\setminus E} \left|\frac{f(z_t)}{f'(z_t)}\right| dt \\
=\;& K_5 \int\limits_{[R_0,R]\setminus E} \frac{1}{\phi(t)}\, dt.
\end{aligned}$$

□

Eine erste Anwendung von Satz 2.2.3 ist folgender Satz, der für Funktionen, deren Ordnung kleiner als zwei ist, eine Abschätzung des Flächeninhaltes von Einzugsbereichen der zugehörigen Newtonabbildung nach unten liefert.

Satz 2.2.4 *Es sei* f *eine ganze Funktion der Ordnung* $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*. Ferner sei* $N_{f|U}$ *konjugiert zu einem endlichen Blaschkeprodukt. Weiter sei* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$*. Dann existiert eine Konstante* $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ *derart, dass*

$$area\,(U \cap A(0, R_0, R)) \geq R^{2-\rho-\varepsilon}$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{>2R_0}$ *gilt. Insbesondere gilt*

$$area\,(U \cap A(0, R_0, \infty)) \;=\; \infty,$$

falls $\rho < 2$ *ist.*

Beweis: Es sei R_0 die Konstante aus Lemma 2.2.1. Um Lemma 2.2.2 anwenden zu können, definieren wir die Abbildung $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, r \mapsto r^{\rho-1+\varepsilon}$. Es sei $K_5 \in \mathbb{R}_{>0}$ die Konstante aus Lemma 2.2.2 und $E \subset (1, \infty)$ die Menge aus Lemma 2.1.3. Es gilt dann

$$\int_{E\cap[1,\infty)} \frac{1}{t} dt \;<\; \infty.$$

Wir können daher R_0 so groß wählen, dass

$$\int\limits_{[R_0,R]\cap E} \frac{1}{t}\,dt \quad < \quad \frac{1}{4(2-\rho-\varepsilon)} \tag{2.22}$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{\geq R_0}$ gilt. Es sei $R \in \mathbb{R}_{\geq 2R_0}$ und $K_7 := \frac{3}{8}\frac{K_5}{2-\rho-\varepsilon}$. Satz 2.2.3 und (2.22) liefern dann

$$\begin{aligned}
& \operatorname{area}(U \cap \mathrm{A}(0,R_0,R)) \\
\geq\ & K_5 \int\limits_{[R_0,R]\setminus E} t^{1-\rho-\varepsilon}\,dt \\
=\ & K_5 \left(\int\limits_{[R_0,R]} t^{1-\rho-\varepsilon}\,dt - \int\limits_{[R_0,R]\cap E} t^{1-\rho-\varepsilon}\,dt \right) \\
=\ & K_5 \left(\frac{R^{2-\rho-\varepsilon}-1}{2-\rho-\varepsilon} - \frac{R_0^{2-\rho-\varepsilon}-1}{2-\rho-\varepsilon} - \int\limits_{[R_0,R]\cap E} t^{2-\rho-\varepsilon}\frac{1}{t}\,dt \right) \\
\geq\ & K_5 \left(\frac{R^{2-\rho-\varepsilon}-1}{2-\rho-\varepsilon} - \frac{R_0^{2-\rho-\varepsilon}-1}{2-\rho-\varepsilon} - R^{2-\rho-\varepsilon} \int\limits_{[R_0,R]\cap E} \frac{1}{t}\,dt \right) \\
>\ & K_5 \left(\frac{R^{2-\rho-\varepsilon}-1}{2-\rho-\varepsilon} - \frac{R_0^{2-\rho-\varepsilon}-1}{2-\rho-\varepsilon} - \frac{R^{2-\rho-\varepsilon}}{4(2-\rho-\varepsilon)} \right) \\
=\ & \frac{3K_5}{4}\,\frac{R^{2-\rho-\varepsilon}-R_0^{2-\rho-\varepsilon}}{2-\rho-\varepsilon} \quad \geq \quad \frac{3K_5}{8}\,\frac{R^{2-\rho-\varepsilon}}{2-\rho-\varepsilon} \quad = \quad K_7 R^{2-\rho-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Führen wir die gleiche Rechnung mit einem geeigneten $\widetilde{\varepsilon} < \varepsilon$ anstelle von ε durch, so erhalten wir

$$\operatorname{area}(U \cap \mathrm{A}(0,R_0,R)) \quad \geq \quad K_7 R^{2-\rho-\widetilde{\varepsilon}} \quad \geq \quad R^{2-\rho-\varepsilon}.$$

Insbesondere gilt $\operatorname{area}(U \cap \mathrm{A}(0,R_0,\infty)) = \infty$. □

Falls es möglich ist, für den Maximalbetrag einer Funktion eine geeignete Abschätzung zu finden, so erhält man mit Hilfe von Satz 2.2.3 folgende Abschätzung des Flächeninhalts von Einzugsbereichen.

Satz 2.2.5 *Es sei $N_{f_{|U}}$ konjugiert zu einem endlichen Blaschkeprodukt. Es existieren Konstanten $R_0 \in \mathbb{R}_{>1}$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$ so, dass*

$$\log M(R,f) \ \leq\ \frac{R^2}{(\log R)^\alpha} \tag{2.23}$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{>R_0}$ gilt. Dann existieren Konstanten $K, K_9 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\mathit{area}(U \cap A(0,R_0,R)) \ \geq\ K_9 \log\log R.$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{\geq K}$. Insbesondere gilt

$$\mathit{area}\,(U \cap A(0, R_0, \infty)) \;=\; \infty.$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei R_0 die Konstante aus Lemma 2.2.1. Es seien K_1 die Konstante und E die Menge aus Lemma 2.1.4. Weiter sei $z \in A(0, R_0, \infty) \cap U$ mit $|z| \notin (E \cup [0, 1])$. Ohne Einschränkung sei R_0 so groß, dass

$$\log \alpha^2 \;\leq\; 2 \log |z| \tag{2.24}$$

für alle $z \in \mathrm{A}(z_0, R_0, \infty)$ gilt. Es sei

$$\widetilde{K} \;:=\; 4K_1\alpha^2.$$

Dann gilt mit (2.4) und (2.23)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| &\leq K_1 \frac{T(\alpha|z|, f)\,(\log|z|)^{\alpha}\,(\log T(\alpha|z|, f))}{|z|} \\
&\leq K_1 \frac{\log M(|z|\alpha, f)\,(\log|z|)^{\alpha} \log\left(\log M(|z|\alpha, f)\right)}{|z|} \\
&\leq K_1\alpha^2|z| \left(\frac{\log|z|}{\log \alpha|z|}\right)^{\alpha} \log\left(\frac{\alpha^2|z|^2}{(\log\alpha|z|)^{\alpha}}\right) \\
&\leq K_1\alpha^2|z| \log\left(\alpha^2|z|^2\right) \;\leq\; \widetilde{K}|z| \log|z|.
\end{aligned}$$

Wir definieren die Abbildung $\phi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \widetilde{K}\, t \log t$. Weiter sei $K_6 \in \mathbb{R}_{>0}$ die Konstante aus Satz 2.2.3. Es existiert ein $r_0 \in \mathbb{R}_{>3}$ so, dass

$$\int\limits_{[r_0,\infty)\cap E} \frac{dt}{t} \;<\; 1 \tag{2.25}$$

ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $R_0 \geq r_0 > \exp(1)$. Ferner sei $R \in \mathbb{R}_{\geq 2R_0}$. Es gilt dann mit Satz 2.2.3

$$\mathrm{area}\,(U \cap \mathrm{A}(0, R_0, R)) \;\geq\; K_6 \int\limits_{[R_0,R]\setminus E} \frac{dt}{\phi(t)}. \tag{2.26}$$

Weiter gilt mit Abschätzung (2.25)

$$\begin{aligned}
K_6 \int\limits_{[R_0,R]\setminus E} \frac{dt}{\phi(t)} &= \frac{K_6}{\widetilde{K}} \left(\int\limits_{[R_0,R]} \frac{dt}{t\log t} - \int\limits_{[R_0,R]\cap E} \frac{dt}{t\log t} \right) \\
\geq \frac{K_6}{\widetilde{K}} &\left(\log\log R - \log\log R_0 - \frac{1}{\log R_0} \int\limits_{[r_0,\infty)\cap E} \frac{dt}{t} \right) \\
= \frac{K_6}{\widetilde{K}} &\left(\log\log R - \log\log R_0 - 1\right)
\end{aligned}$$

Es existieren dann Konstanten $\hat{K}, K \in (0,1)$ mit

$$\frac{K_6}{\widetilde{K}} (\log\log R - \log\log R_0 - 1) \quad \geq \quad \hat{K} \log\log R \tag{2.27}$$

für alle $R \geq K$. Es folgt mit (2.26) und (2.27)

$$\text{area}\,(U \cap \mathrm{A}(0, R_0, R)) \quad \geq \quad \frac{K_6}{\widetilde{K}} (\log\log R - \log\log R_0 - 1) \quad \geq \quad K_9 \log\log R$$

mit $K_9 = \frac{\hat{K}\, K_6}{\widetilde{K}}$ und somit

$$\text{area}\,(U \cap \mathrm{A}(0, R_0, \infty)) \quad = \quad \infty.$$

□

2.3 Einzugsbereiche von Funktionen aus der Laguerre-Pólya-Klasse

In den vorherigen beiden Abschnitten dieses Kapitels haben wir alle technischen Hilfsmittel, die wir benötigen, um eine Aussage über die Größe der Einzugsbereiche von Nullstellen des Newtonverfahrens von Funktionen aus der Laguerre-Pólya-Klasse zu beweisen, zur Verfügung gestellt. Wir können daher direkt den ersten Hauptsatz dieser Arbeit beweisen.

Satz 2.3.1 (Hauptsatz 1) *Es sei $f \in \mathcal{LP}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f und U der unmittelbare Einzugsbereich von z_0 bezüglich N_f. Dann gilt*

$$\textit{area}\,(U) \quad = \quad \infty.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, dass U höchstens endlich viele kritische Punkte von N_f und keine transzendente Singularität von N_f enthält. Nach Satz 2.2.1 ist $N_{f|U}$ konjugiert zu einem endlichen Blaschkeprodukt. Es seien $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Mengen und K_3 die Konstante aus Lemma 2.1.7. Lemma 2.1.7 liefert, dass wir nun Satz 2.2.3 mit der Funktion $\phi(x) = K_4\, x$ anwenden können. Es existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $R_k \geq R_0$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq j}$. Es sei K_6 die Konstante aus Satz 2.2.3. Da $N_{f|U}$ zu einem endlichen Blaschkeprodukt konjugiert ist, erhalten wir mit Hilfe von Satz 2.2.3

$$\text{area}\,(U \cap \mathrm{A}(0, R_k/2, R_k)) \quad \geq \quad K_6 \int_{[R_k/2, R_k]\setminus B_k} \frac{1}{K_3 t}\, dt \tag{2.28}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq j}$. Es gilt weiter

$$\int_{B_k \cap [R_k/2, R_k]} \frac{1}{t}\, dt \quad \leq \quad \int_{R_k/2}^{R_k/2 + R_k/4} \frac{1}{t}\, dt \quad = \quad \log\frac{3}{2} \tag{2.29}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq j}$. Wir erhalten dann mit (2.28) und (2.29)

$$\begin{aligned}
\operatorname{area}(U \cap \mathrm{A}(0, R_0, \infty)) &\geq \sum_{k=j}^{\infty} \operatorname{area}(U \cap \mathrm{A}(0, R_k/2, R_k)) \\
&\geq \sum_{k=j}^{\infty} K_6 \int_{[R_k/2, R_k] \setminus B_k} \frac{1}{K_3 t}\, dt \\
&= \frac{K_6}{K_3} \sum_{k=j}^{\infty} \left(\int_{[R_k/2, R_k]} \frac{1}{t}\, dt - \int_{B_k \cap [R_k/2, R_k]} \frac{1}{t}\, dt \right) \\
&\geq \frac{K_6}{K_3} \sum_{k=j}^{\infty} \left(\log 2 - \log \frac{3}{2} \right) \;=\; \frac{K_6}{K_3} \sum_{k=j}^{\infty} \log \frac{4}{3} \;=\; \infty.
\end{aligned}$$

Es bleibt also der Fall, dass U eine transzendente Singularität w_0 von N_f oder unendlich viele kritische Punkte von N_f enthält. Wir werden zunächst zeigen, dass der Fall, dass U unendlich viele kritische Punkte von N_f enthält, nicht auftreten kann.

Die kritischen Punkte von N_f sind die Nullstellen von f und f''. Es enthält U genau eine Nullstelle von f, nämlich z_0. Da f aus der Laguerre-Pólya-Klasse ist, folgt mit Hilfe von Bemerkung 1.7.1, dass auch f' und f'' aus der Laguerre-Polýa-Klasse sind. Also besitzen f, f' und f'' ausschließlich reelle Nullstellen. Es ist U nach Satz 1.9.3 einfach zusammenhängend. Folglich ist $U \cap \mathbb{R}$ ein Intervall. Es sei $I := U \cap \mathbb{R}$. Nach Bemerkung 1.7.4 ist $\frac{f'}{f}$ auf $I \cap \{x \in \mathbb{R} : x < z_0\}$ und $I \cap \{x \in \mathbb{R} : x > z_0\}$ streng monoton fallend. Folglich enthält I maximal drei Nullstellen von f'. Es seien x_1, x_2 und x_3 die Nullstellen von f' in I. Ohne Einschränkung sei $x_1 < x_2 < x_3$. Es ist dann $\frac{f''}{f'}$ nach Bemerkung 1.7.4 auf den Intervallen $I \cap \{x \in \mathbb{R} : x < x_1\}$, $I \cap \{x \in \mathbb{R} : x_1 < x < x_2\}$, $I \cap \{x \in \mathbb{R} : x_2 < x < x_3\}$ und $I \cap \{x \in \mathbb{R} : x_3 < x\}$ streng monoton fallend. Folglich hat f'' maximal sieben Nullstellen in I. Wir erhalten also insgesamt, dass N_f maximal acht kritische Punkte in U hat.

Enthält U eine transzendente Singularität von f, so handelt es sich dabei um eine direkte oder indirekte Singularität. Ein Satz von Bergweiler und Eremenko [3, S. 357] besagt, dass jede indirekte Singularität ein Grenzwert von kritischen Werten ist. Es besitzt f nur endlich viele nicht reelle Nullstellen. Mit Hilfe von Satz 2.2.2 und der Invarianz von Einzugsbereichen erhalten wir, dass U nur endlich viele kritische Werte von N_f enthält. Folglich kann U keine indirekte Singularität von N_f enthalten. Demzufolge können in U nur direkte Singularitäten von N_f liegen. Es bleibt also noch der Fall, dass über w_0 eine direkte Singularität liegt. Es sei γ ein asymptotischer Weg mit $\operatorname{Spur}(\gamma) \subset U$. Es sei $\kappa \in (1/2, 1)$. Für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ seien $b_r := U \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $r\theta(r)$ das lineare Maß von b_r und

$$\widetilde{\theta}(r) := \begin{cases} \theta(r) & , \quad \text{falls} \quad \partial D(0,r) \not\subset U \\ \infty & , \quad \text{falls} \quad \partial D(0,r) \subset U. \end{cases}$$

Wir setzen $\frac{1}{r\widetilde{\theta}(r)} := 0$, falls $r\widetilde{\theta}(r) = \infty$ ist. Es sei $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ so gewählt, dass $b_{R_0} \neq \emptyset$ ist. Da U nach Satz 1.9.3 einfach zusammenhängend ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\widetilde{\theta}(t) \neq \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>R_0}$ gilt, da andernfalls sofort folgen würde, dass area$(U) = \infty$ ist. Satz 1.8.4 liefert

$$\log T(r, N_f) \quad \geq \quad \pi \int\limits_{R_0}^{\kappa R} \frac{1}{t\widetilde{\theta}(t)}\, dt - O(1) \tag{2.30}$$

für $R \to \infty$. Es gilt dann mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\kappa R - R_0 \quad = \quad \int\limits_{R_0}^{\kappa R} dt \quad = \quad \int\limits_{R_0}^{\kappa R} \frac{\sqrt{t\widetilde{\theta}(t)}}{\sqrt{t\widetilde{\theta}(t)}}\, dt \quad \geq \quad \sqrt{\int\limits_{R_0}^{\kappa R} t\widetilde{\theta}(t)\, dt \int\limits_{R_0}^{\kappa R} \frac{1}{t\widetilde{\theta}(t)}\, dt}\,. \tag{2.31}$$

Nach Satz 1.5.1 ist $\rho(f) = \rho(f')$. Satz 1.5.2 liefert dann $\rho(f/f') \leq \rho(f)$ und somit $\rho(N_f) \leq \rho(f)$. Also existiert eine Konstante $K \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$\log T(R, N_f) \quad \leq \quad K \log R \tag{2.32}$$

für alle $R > R_0$ gilt. Es folgt mit(2.30), (2.31) und (2.32)

$$\int\limits_{R_0}^{\kappa R} t\widetilde{\theta}(t)\, dt \quad \geq \quad \frac{(\kappa R - R_0)^2}{\int\limits_{R_0}^{\kappa R} \left(t\widetilde{\theta}(t)\right)^{-1} dt} \quad \geq \quad \frac{(\kappa R - R_0)^2}{\log T(R, N_f) + \mathcal{O}(1)} \quad \geq \quad \frac{(\kappa R - R_0)^2}{K \log R + \mathcal{O}(1)}$$

für $R \to \infty$. Wir erhalten

$$\operatorname{area}\left(U \cap \mathrm{A}(0, R_0, R)\right) \quad \geq \quad \int\limits_{R_0}^{\kappa R} t\widetilde{\theta}(t)\, dt \quad \geq \quad \frac{(\kappa R - R_0)^2}{K \log R + \mathcal{O}(1)}$$

für $R \to \infty$ und somit

$$\operatorname{area}\left(U \cap \mathrm{A}(0, R_0, \infty)\right) \quad = \quad \infty.$$

□

2.4 Anwendungen für Funktionen der Form $f = P \cdot g$, wobei P ein reelles Polynom und $g \in$ LP ist

Mit Hilfe von Hauptsatz 1 (Satz 2.3.1) lässt sich ein analoges Ergebnis für Funktionen, die aus einem Produkt von Funktionen aus der Laguerre-Pólya-Klasse und einem reellen Polynom bestehen, erzielen. Im Beweis von Satz 2.3.1 konnten wir in dem Fall, dass $N_{f|U}$ zu einem endlichen Blaschkeprodukt konjugiert ist, elementar nachrechnen, dass U höchstens endlich viele kritische Punkte von N_f enthält. Der Grund dafür war, dass die Ableitung von $\mathcal{LP}$-Funktionen wiederum eine $\mathcal{LP}$- Funktion ist , und dass die logarithmische Ableitung von $\mathcal{LP}$-Funktionen auf der reellen Achse streng monoton fallend ist. Betrachtet man ein Produkt aus einem Polynom und einer $\mathcal{LP}$-Funktion, so ist die Ableitung davon im Allgemeinen keine $\mathcal{LP}$- Funktion. Folglich steht im Gegensatz zum Beweis von Satz 2.3.1 das Hilfsmittel der Monotonie nicht zur Verfügung. Mit Hilfe eines Satzes vom Borel (Satz 2.2.2) können wir zeigen, dass U höchstens endlich viele kritische Punkte von N_f enthält.

Satz 2.4.1 *Es sei $g \in \mathcal{LP}$ und P ein reelles Polynom. Ferner sei $f = P \cdot g$. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f und U der unmittelbare Einzugsbereich von z_0 bezüglich N_f. Dann gilt*

$$\mathit{area}(U) = \infty.$$

Beweis: Wir gehen analog zum Beweis von Satz 2.3.1 vor. Es sei $K_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ die Konstante aus Lemma 2.1.7. Die Funktion $f = g \cdot P$ ist reell und hat nur endlich viele nicht reelle Nullstellen. Weiter gilt mit Hilfe von Lemma 2.1.7

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right| + \left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right| \leq K|z|$$

für eine Konstante $K \in \mathbb{R}_{\geq K_3}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \in \{[R_k/2, R_k] \setminus B_k : k \in \mathbb{N}\}$, wobei $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge aus Lemma 2.1.6 und $B_k \subset \mathbb{R}$ mit $\mathrm{meas}(B_k) \leq \frac{1}{4}R_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Zusätzlich zu den reellen Nullstellen können auch nicht reelle Nullstellen auftreten. Mit Hilfe von Lemma 2.2.3 folgt, dass f' und f'' nur endlich viele nicht reelle Nullstellen haben. Wir erhalten dadurch, dass der Fall, dass U höchstens endlich viele kritische Punkte von N_f und keine transzendente Singularität von N_f enthält, analog zum Beweis von Satz 2.3.1 funktioniert. Ebenfalls analog zur Argumentation im Beweis von Satz 2.3.1 folgt, dass U höchstens endlich viele kritische Punkte von f enthält. Mit Hilfe von Satz 2.2.2 erhalten wir, dass U höchstens endlich viele kritische Werte von N_f enthält.

□

Man kann Satz 2.4.1 in einer allgemeineren Variante beweisen. Für den Beweis von Satz 2.4.1 benötigt man nicht, dass die Funktion g aus der Laguerre-Pólya-Klasse ist. Es reicht, dass die Funktion g reell ist, nur reelle Nullstellen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{a_k}^2} < \infty$ ist und $\log M(r,g) \leq Kr^2$ und für alle hinreichend großen $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit einer Konstanten $K \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Funktionen, die diese Voraussetzung erfüllen, haben die Gestalt

$$g(z) = \exp\left(az^2 + bz + c\right) z^n \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{x_k}\right) \exp\left(\frac{z}{x_k}\right) \tag{2.33}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Nullstellen von g sind. Im Gegensatz zu Funktionen aus der Laguerre-Pólya-Klasse ist also auch der Fall $a > 0$ erlaubt. Es gilt somit der folgende Satz.

Satz 2.4.2 *Es sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine transzendente ganze Funktion mit $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Es seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Nullstellen von g und es gelte $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter gelte $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{a_k}^2} < \infty$. Ferner existiere eine Konstante $K \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\log M(r,g) \leq Kr^2$ für alle hinreichend großen $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Es sei P ein reelles Polynom und $f = P \cdot g$. Des Weiteren sei z_0 ein Fixpunkt von N_f und U der zugehörige Einzugsbereich von z_0. Dann gilt*

$$\mathit{area}(U) = \infty.$$

2.5 Anwendungen für reelle Funktionen, deren Ordnung kleiner als zwei ist

Durch ein ähnliches Vorgehen wie im Beweis von Satz 2.3.1 erhalten wir unseren zweiten Hauptsatz, der eine Abschätzung der Größe der Einzugsbereiche von reellen Funktionen liefert, deren Ordnung kleiner als zwei ist. Im Gegensatz zu Satz 2.4.1 gibt Hauptsatz 2 eine explizite Schranke für die Größe der Einzugsbereiche nach unten. Der Grund dafür ist, dass wir uns auf Funktionen beschränken, deren Ordnung kleiner als zwei ist.

Satz 2.5.1 (Hauptsatz 2) *Es sei f eine reelle transzendente ganze Funktion endlicher Ordnung $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche nur endlich viele nicht reelle Nullstellen habe. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f und U der unmittelbare Einzugsbereich von z_0 bezüglich N_f. Weiter sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann existiert eine Konstante $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass*

$$\mathit{area}\,(U \cap A(0, R_0, R)) \geq R^{2-\rho-\varepsilon}$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{>2R_0}$ gilt. Insbesondere gilt

$$\mathit{area}\,(U) \;=\; \infty,$$

falls $\rho < 2$ ist.

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der nicht reellen Nullstellen und es seien $a_1, \ldots, a_n$ die nicht reellen Nullstellen von f. Wir definieren

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad g(z) \mapsto \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^{n} (z - a_k)}.$$

Es ist dann $g \in \mathcal{LP}$. Wir gehen nun analog zum Beweis von Satz 2.3.1 vor. Enthält U nur endlich viele kritische Punkte und keine transzendente Singularität von N_f, so ist nach Satz 2.2.1 $N_{f|U}$ konjugiert zu einem endlichen Blaschkeprodukt. Da die Ordnung von f kleiner als zwei ist, folgt dann mit Satz 2.2.4, dass eine Konstante $R_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ derart existiert, dass

$$\mathrm{area}\,(U \cap \mathrm{A}(0, R_0, R)) \geq R^{2-\rho-\varepsilon}$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{>2R_0}$ gilt. Analog zu dem Beweis von Satz 2.3.1 erhalten wir, dass U höchstens endlich viele kritische Punkte vom N_f enthält. Daher kann in dem Fall, dass U eine transzendente Singularität oder unendlich viele kritische Punkte enthält, nur der Fall auftreten kann, dass U eine direkte Singularität enthält. Für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ seien $b_r := U \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $r\theta(r)$ das lineare Maß von b_r und

$$\widetilde{\theta}(r) := \begin{cases} \theta(r) & , \quad \text{falls} \quad \partial D(0,r) \not\subset U \\ \infty & , \quad \text{falls} \quad \partial D(0,r) \subset U. \end{cases}$$

Wir setzen $\frac{1}{r\widetilde{\theta}(r)} := 0$ sei, falls $r\widetilde{\theta}(r) = \infty$ ist. Analog zu dem Beweis erhalten wir

$$\mathrm{area}\,(U \cap \mathrm{A}(0, R_0, R)) \;\geq\; \int_{R_0}^{\kappa R} t\widetilde{\theta}(t)\, dt \;\geq\; \frac{(\kappa R - R_0)^2}{\mathcal{O}(\log R) + \mathcal{O}(1)}$$

für $R \to \infty$. Also existiert eine Konstante $K \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\text{area}\,(U \cap \mathrm{A}(0, R_0, R)) \geq K R^{2-\rho-\varepsilon}$$

für alle $R \in \mathbb{R}_{>2R_0}$. Führen wir die gleiche Rechnung mit einem geeigneten $\widetilde{\varepsilon} < \varepsilon$ anstelle von ε durch, so erhalten wir

$$\text{area}\,(U \cap \mathrm{A}(0, R_0, R)) \geq R^{2-\rho-\varepsilon}$$

□

2.6 Eine Diskussion der Ergebnisse

Eine offensichtliche Frage ist die, ob die Bedingung der Beschränktheit der Ordnung durch zwei notwendig ist, um eine quantitative Abschätzung der Größe der Einzugsbereiche von Fixpunkten des Newtonverfahrens zu erzielen. Für Funktionen, der Form $f(z) = P(z) \cdot \exp(Q(z))$, wobei P und Q Polynome sind und der Grad von Q mindestens drei ist, bewies Mako E. Haruta [12], dass jeder Einzugsbereich eines Fixpunktes des Newtonverfahrens endlich ist. Das bedeutet, dass für Funktionen, deren Ordnung mindestens drei ist, die Flächeninhalte der Einzugsbereiche im Allgemeinen nicht unendlich sind. Es bleibt daher zu untersuchen, ob die Grenze, dass die Ordnung der betrachteten Funktion maximal zwei beträgt, scharf ist.

Dazu betrachten wir eine ganze transzendente Funktion f der Ordnung $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, die die Eigenschaften $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ und $n(r, 0) = \lfloor r^\rho \rfloor$ für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt. Dies ist gemäß Satz 1.6.2 möglich. Wir wählen

$$R_k \ := \ 2^k$$

und

$$A_k^j \ := \ \text{area}\,(\mathcal{A}(z_j) \cap A(0, R_k, R_{k+1}))$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}_{\leq k}$, wobei z_j die Nullstellen von f in $B(0, R_k)$ und $\mathcal{A}(z_j)$ die zugehörigen Einzugsbereiche der Nullstellen seien. Es sei $k \in \mathbb{N}$ und

$$A_k \ := \ \frac{1}{n(R_{k+1}, f)} \sum_{j=1}^{n(R_{k+1}, f)} A_k^j.$$

Dann ist A_k der durschnittliche Flächeninhalt der Einzugsbereiche von Nullstellen im Kreisring $A(0, R_k, R_{k+1})$. Es gilt

$$A_k \ \leq \ \frac{\pi\left({R_{k+1}}^2 - {R_k}^2\right)}{n(R_{k+1}, f)} \ \leq \ 3\pi\, 2^{k(2-\rho)}.$$

Es hat also jeder Flächeninhalt durchschnittlich die Größe

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \ \leq \ 3\pi \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(2-\rho)}. \tag{2.34}$$

Die Reihe in (2.34) konvergiert genau dann, wenn $\rho > 2$ ist.

Eine weitere Frage, die sich stellt, ist die nach der Notwendigkeit der weiteren Voraussetzungen, die wir an die Funktionen gestellt haben, die wir betrachten. So fordern wir, dass unsere Funktion die reelle Achse auf die reelle Achse abbildet. Dieses ist eine rein technische Voraussetzung. Zusammen mit der Forderung, dass unsere Funktion nur endlich viele nicht reelle Nullstellen besitzt, liefert sie, dass entweder der Einzugsbereich eines Fixpunktes der Newtonfunktion eine direkte Singularität enthält, oder dass die Newtonfunktion eingeschränkt auf den Einzugsbereich zu einem Blaschkeprodukt konjugiert ist. Es ist nicht klar, ob die Aussagen, die wir in dieser Arbeit zeigen, gelten, wenn man auf diese Voraussetzung verzichtet. Es erscheint allerdings plausibel, dass die Einzugsbereiche von Nullstellen beim Newtonverfahren für alle Funktionen der Ordnung kleiner als zwei einen unendlichen Flächeninhalt besitzen.

Verzeichnis der verwendeten Symbole

$\mathbb{N}$	die natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}$	die rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	die reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{>0}$	die positiven reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	die komplexen Zahlen
$\hat{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\mathrm{A}(a, r, R)$	$\{z \in \mathbb{C} : r < \|z-a\| < R\}$
$B_r(a)$	$\{z \in \mathbb{C} : \|z-a\| < r\}$
$\widehat{B}_r(a)$	$\left\{z \in \hat{\mathbb{C}} :\ \chi(a, z) < r\right\}$, wobei χ die sphärische Metrik auf $\hat{\mathbb{C}}$ sei
$\mathbb{D}$	$\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$
$\overline{X}$	Abschluss der Menge X
∂X	Rand der Menge X
$\mathrm{dist}(z, U)$	$\inf\{\|z-w\| : w \in U\}$ für $z \in \mathbb{C}$ und $U \subset \mathbb{C}$
$\widehat{\mathrm{dist}}(z, U)$	$\inf\{\chi(z, w) : w \in U\}$ für $z \in \hat{\mathbb{C}}$ und $U \subset \hat{\mathbb{C}}$, wobei χ die sphärische Metrik auf $\hat{\mathbb{C}}$ sei
$\mathrm{area}(U)$	Lebesgue'sche Maß der Menge $U \subset \mathbb{C}$
$\mathrm{diam}(U)$	Durchmesser der Menge $U \subset \mathbb{C}$
$\widehat{\mathrm{diam}}(U)$	Durchmesser der Menge $U \subset \hat{C}$ bezüglich der sphärischen Metrik
$\mathrm{meas}(A)$	Lebesgue'sche Maß der Menge $A \subset \mathbb{R}$
ρ_U	hyperbolische Metrik auf U
ϱ_U	Dichte der hyperbolischen Metrik auf U
ρ	Ordnung einer Funktion
$\mathcal{F}(f)$	Fatoumenge von f
$\mathcal{J}(f)$	Juliamenge von f
$\mathcal{LP}$	die Laguerre-Pólya-Klasse
N_f	Newtonfunktion für eine ganze Funktion f
$M(r, f)$	$\max\{\|f(z)\| : \|z\| = r\}$ für eine ganze Funktion f
$N(r, a)$	Nevanlinnasche Anzahlfunktion für eine meromorphe Funktion f
$m(r, f)$	Nevanlinnasche Schmiegungsfunktion für eine meromorphe Funktion f
$T(r, f)$	Nevanlinnasche Charakteristik für eine meromorphe Funktion f
$\mathrm{Spur}\,(\Gamma)$	Spur der Kurve Γ

Literaturverzeichnis

[1] AHLFORS, L. V. *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen*, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Nov. Serie A, Vol. 1, No. 9, 1-40, 1930

[2] BAKER, I. N. *Repulsive fixpoints of entire functions*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 104, No. 3, 252-256, 1968

[3] BERGWEILER, W., EREMENKO, A. *On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order*, Revista Matematica Iberoamericana, Vol. 11, No. 2, 355-374, 1995

[4] BERGWEILER, W., DRASIN, D., LANGLEY, J. K. *Baker domains for Newton's method*, Annales de l'Institut Fourier, Vol. 57, No. 3, 803-814, 2007

[5] BERGWEILER, W. *Iteration of meromorphic functions*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Vol. 29, No. 2, 151-188, 1993

[6] BOREL, E. *Leçons sur les fonctions entières*, Gauthier-Villars, Paris, 1900

[7] CARLEMANN, T. *Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Vol. 196, 995-987, 1933

[8] CONWAY, JOHN, B. *Functions of One Complex Variable I*, Second Edition, Springer, 1978

[9] FISCHER, W. und LIEB I. *Funktionentheorie*, Vieweg, 1994

[10] FISCHER, W. und LIEB, I. *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*, Vieweg, 1988

[11] GUNDERSEN, G. *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, Journal of the London Mathematical Society, Vol. 37, No. 1, 88-104, 1988

[12] HARUTA, M. E. *Newton's method on the complex exponential function*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 351, No. 6, 2499 - 2513, 1999

[13] IVERSEN, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, These, Helsingfors, 1914

[14] JANK, G. , VOLKMANN, L. *Meromorphe Funktionen und Differentialgleichungen*, Birkhäuser, 1985

[15] KŒNIGS, G. *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionelles* Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure Paris, (3e ser.) Vol. 1, 1-41, 1884

[16] KRIETE, H. *On the efficiency of relaxed Newton's method*, Pitman Research Notes, Math. Ser. 305, 200-212, 1994

[17] LAGUERRE, E. *Oeuvres* ,Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1898

[18] LEVIN, B. J. *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Translated Mathematical Monographies, Vol. 5, American Mathematical Society Providence, R. I. 1964, rev. ed. 1980

[19] LEVIN, B. J. *Nullstellenverteilung ganzer Funktionen*, Akademie-Verlag Berlin, 1962

[20] MACINTYRE, A. J. und FUCHS, W. H. T. *Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial*, Annals of Mathematics, Vol. 129, No. 1, 1989

[21] MARDEN, M. *On the Derivative of an Entire Function*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.19, No. 5, 1968

[22] MILNOR, J. *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press, 3. Auflage, 2006

[23] MOROSAWA, S., NISHIMURA, Y., TANIGUCHI, M. und UEDA, T. *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press, 2000

[24] MEYER, S., SCHLEICHER, D. *Immediate and virtual basins of Newton's method for entire functions*, Annales de l'Institute Fourier, Tome 56, No. 2, 2006

[25] WEIERSTRASS, K. *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1876

[26] NEEDHAM, T. *Anschauliche Funktionentheorie*, Oldenbourg, 2001

[27] NEVANLINNA, R. *Analytic Functions*, Springer, 1970

[28] NEVANLINNA, R. *Zur Theorie der meromorphen Funktionen*, Acta Mathematica 46, 1925

[29] PÓLYA, G. Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln, Rendiconti del Circolo Matemático di Palermo Vol. 36, 279-295, 1913

[30] PRZYTYCKI, F., *Remarks on the simple connectedness of basins of sinks for iterations of rational maps*, Banach Center Publications, Vol. 23, 229-235, 1989

[31] SHEIL-SMALL, T. *On the zeros of the derivatives of real entire functions and Wiman's conjecture*, Annals of mathematics, Vol. 129, No. 1, 1989

[32] STEINMETZ, N. *Rational Iteration*, De Gruyter, 1993

[33] TSUJI, M. *Potential theory in modern function theory*, Maruzen, 1959

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit abgesehen von der Beratung durch den Betreuer meiner Promotion unter Einhaltung guter wissenschaftlicher Praxis selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Diese Arbeit hat weder ganz noch in Teilen an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Des Weiteren versichere ich, noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Kiel, den 25. Juli 2011

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Julka Deimling
Geburtsdatum und -ort	12. Juni 1982, Münster
Familienstand	ledig
Nationalität	deutsch

Schulbildung

1992 - 2001	Internatsgymnasium Schloß Plön
06/2001	Abitur

Hochschullaufbahn

10/2002 - 09/2003	Studium der Violine am Johannes-Brahms-Konservatorium in Hamburg
10/2003 - 01/2009	Studium der Mathematik mit Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
10/2006	Vordiplom
10/2005 - 02/2009	Studentische Hilfskraft am Mathematischen Seminar der CAU Kiel
01/2009	Diplom
seit 02/2009	Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Mathematischen Seminar der CAU Kiel

Kiel, den 25. Juli 2011